La macchina a ciclo Rankine

Il problema di realizzare un ciclo termodinamico che produca la massima quantità di lavoro a parità di calore entrante, ha come soluzione ottimale la macchina di Carnot. Si tratta però di una macchina ideale, perché opera su un ciclo reversibile.
Nella pratica, la soluzione che in maniera più brillante approssima quella ottimale è la macchina di Rankine:

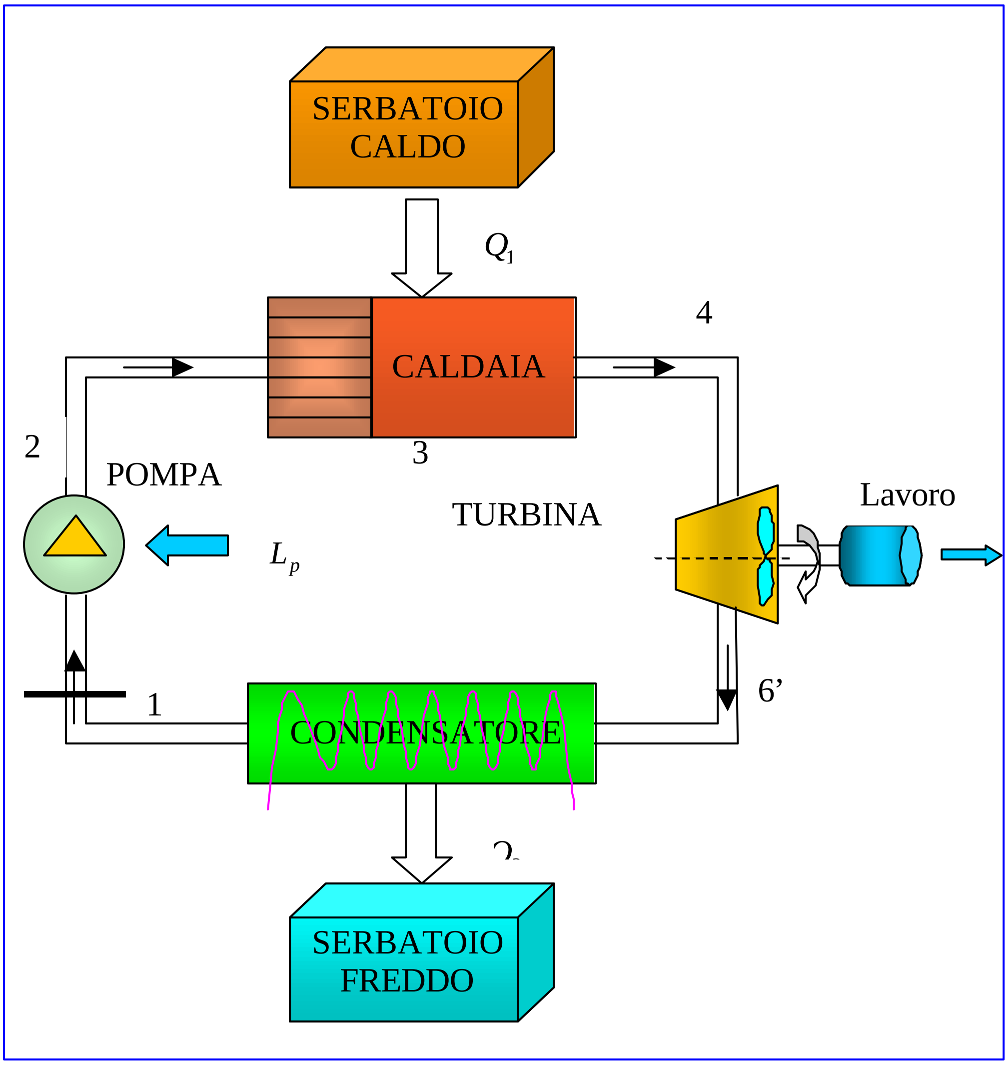

Fig.1 - schema della macchina di Rankine

La macchina di Rankine ha avuto e ha tuttora innumerevoli applicazioni: dalla locomotiva a vapore, alle centrali termoelettriche a combustibile chimico o nucleare. Normalmente, il fluido che descrive il ciclo è l’acqua.
Per studiarne il funzionamento, possiamo ricorrere a tre tipi di diagramma:

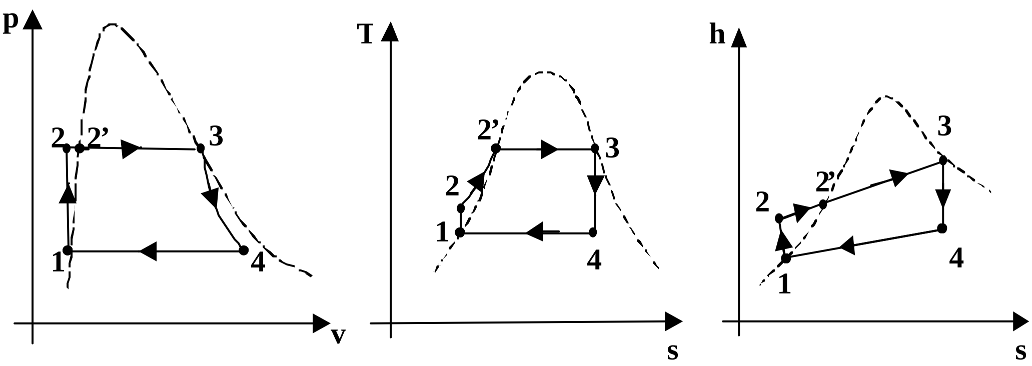

Fig.2 - diagrammi pressione-volume, temperatura-entropia, entalpia-entropia

Il primo è il più intuitivo, ma il secondo è il più importante (il terzo è per uso specialistico).

Facciamo dunque riferimento al diagramma **T-s** e spieghiamo il ciclo passo-passo:

1®2: il fluido, che è nella fase liquida, subisce una compressione isoentropica (**s** è costante); ciò viene realizzato mediante una pompa, sistema aperto che non scambia calore:

$$h_2 - h_1 = -l_p > 0 \Rightarrow |l_p| = h_2 - h_1 \qquad (1)$$

2®2’, 2’®3: il fluido viene prima riscaldato e poi vaporizzato, sempre a pressione costante; si utilizza una caldaia, sistema aperto che non scambia lavoro:

$$h_3 - h_2 = q_1 > 0 \qquad (2)$$

la quantità di calore $\mathbf{q_1}$ viene prelevata dai fumi caldi prodotti dalla combustione di un combustibile e dell’aria comburente

3®4: il fluido, che ora è nella fase di vapore saturo secco, passa attraverso a una turbina, sistema aperto che non scambia calore, e, espandendosi isoentropicamente, compie lavoro:

$$h_4 - h_3 = -l_t < 0 \Rightarrow l_t = h_3 - h_4 \qquad (3)$$

4®1: il fluido, nello fase di vapore saturo a bassa pressione, viene portato completamente nella fase liquida, a pressione e temperatura costanti; per fare ciò, si utilizza un condensatore, che cede la quantità di calore

$$h_1 - h_4 = q_2 < 0 \Rightarrow |q_2| = h_4 - h_1 \qquad (4)$$

a una serpentina (serbatoio freddo)
Calcoliamo il coefficiente economico **e**, rapporto tra lavoro prodotto e calore assorbito netti:

$$å = \frac{l_t - |l_p|}{q_1} \qquad (5)$$

ossia, da (1),(2) e (3):

$$å = \frac{h_3 - h_4 - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2} \qquad (6)$$

Ora, poiché in **1 ® 2** il fluido è nella fase liquida:

$$h_2 - h_1 = (p_2 - p_1)v \qquad (7)$$

dove **v** (**= v_1 = v_2** , i liquidi sono incomprimibili; il valore per l'acqua è 1 dm^3/kg) e **p1**,**p2** sono tabulate in funzione di **T**.
Per gli stati **3** e **4**, in cui il fluido è nella fase di vapore saturo, vale la formula:

$$h = h_l + rx \qquad (8)$$

dove **h_l(p,T)** è l'entalpia sulla curva limite inferiore (tabulata), **r(p,T)** è il calore latente di vaporizzazione (tabulato) e **x** il titolo. Quest'ultimo vale 1 per lo stato **3** (la massa di vapore coincide con la massa totale del fluido); va invece calcolato per lo stato **4**, sfruttando il fatto che la trasformazione **3 ® 4** è isoentropica:

$$s_3 = s_4 \qquad (9)$$

$$s_3 = s_{l2'} + x_3 \frac{r_3}{T_3} = s_{l2'} + \frac{r_3}{T_3} \qquad (10)$$

$$s_4 = s_{l1} + x_4 \frac{r_4}{T_4} \qquad (11)$$

da cui:

$$x_4 = \frac{s_{l2'} + \frac{r_3}{T_3} - s_{l1}}{\frac{r_4}{T_4}} \qquad (12)$$

dove s_l(p,T) è l'entropia sulla curva limite inferiore (tabulata).
Notiamo poi che la (6) può essere così riscritta:

$$å = \frac{(h_3 - h_2) - (h_4 - h_1)}{h_3 - h_2} = \frac{q_1 - |q_2|}{q_1} \qquad (13)$$

e che quindi:

$$l_t - |l_p| = q_1 - |q_2| \qquad (14)$$

Confrontiamo il ciclo di Rankine e il ciclo di Carnot (perché ciò abbia senso, devono operare tra le stesse temperature):

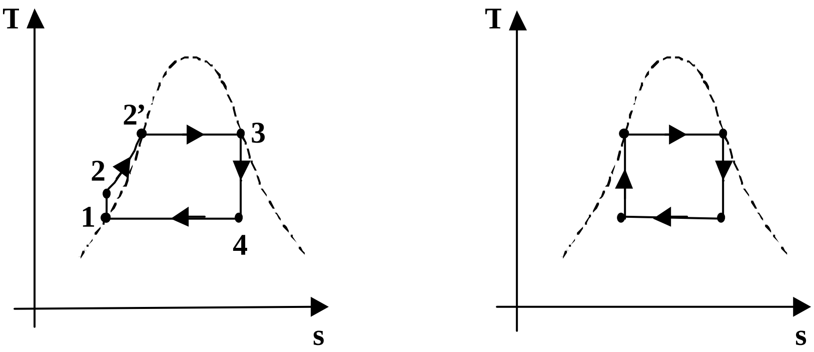

Fig.3 - ciclo di Rankine e ciclo di Carnot, diagramma T-s

il ciclo di Rankine presenta delle irreversibilità; ad esempio, il fatto che man mano che si prende calore dai fumi di combustione la loro temperatura diminuisca, è una causa di irreversibilità esterna; il fluido è comunque sempre in equilibrio termodinamico, per cui l’area del ciclo nel diagramma rappresenta la differenza tra il calore assorbito e il calore ceduto, cioè il lavoro prodotto, come per il ciclo di Carnot. Guardando le figure, è lecito aspettarsi che il rendimento termodinamico

$$ç_T = \frac{å}{å_c} \qquad (15)$$

(rapporto tra il coefficiente economico della macchina di Rankine e quello della macchina di Carnot) assuma un valore prossimo all’unità.
Ora si vedrà come determinare il coefficiente economico **e** per un ciclo di Rankine. Supposti $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_4}$ = 40 °C e $\mathbf{T_2} = \mathbf{T_3}$ = 250,3 °C, dall’espressione (7) si ottiene:

$$h_2 = h_1 + (p_2 - p_1)v = h_{l1} + (p_2 - p_1)v =$$
$$= 167,5 + (4000 - 7,38)0,001 = 171,5\frac{kJ}{kg}$$

Da (8):

$$h_3 = h_{l2'} + r_3 x_3 = 1087,4 + 1712,9 = 2800,3\frac{kJ}{kg}$$

Da (12):

$$x_4 = \frac{s_{l2'} + \dfrac{r_3}{T_3} - s_{l1}}{\dfrac{r_4}{T_4}} = \frac{6,069 - 0,572}{\dfrac{2406,9}{313}} = 0,714$$

Da (8):

$$h_4 = h_{l1} + r_4 x_4 = 167,5 + 2406,9 \cdot 0,714 = 1886\frac{kJ}{kg}$$

Quindi, da (6):

$$\text{å} = \frac{h_3 - h_4 - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2} = \frac{2800{,}3 - 1886 - (171{,}5 - 167{,}5)}{2800{,}3 - 171{,}5} = 0{,}346$$

Facciamo un confronto con il ciclo di Carnot:

$$\text{å}_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{313}{523{,}3} = 0{,}402$$

Quindi:

$$\text{ç}_T = \frac{\text{å}}{\text{å}_c} = \frac{0{,}346}{0{,}402} = 0{,}86 \qquad \text{(grande!)}$$

Macchina a ciclo Rankine con surriscaldatore

Abbiamo visto che il vapore saturo secco in uscita dalla caldaia viene fatto espandere utilizzando una turbina; ma poiché nello stato 4 il titolo è abbastanza minore di 1, ci sono gocce di liquido che entrano in violento contatto con le parti meccaniche della turbina e le erodono.
In genere si adotta la seguente soluzione:

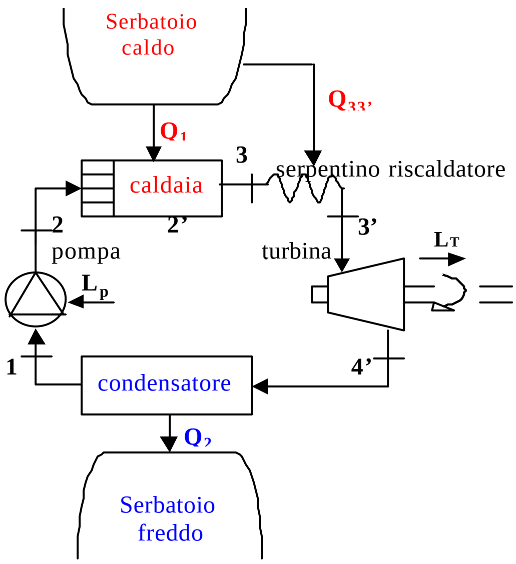

Fig.4 - schema della macchina di Rankine con surriscaldatore

Il serpentino riscaldatore fa sì che il fluido in uscita dalla caldaia passi dalla fase di vapore saturo secco in quella di vapore surriscaldato.

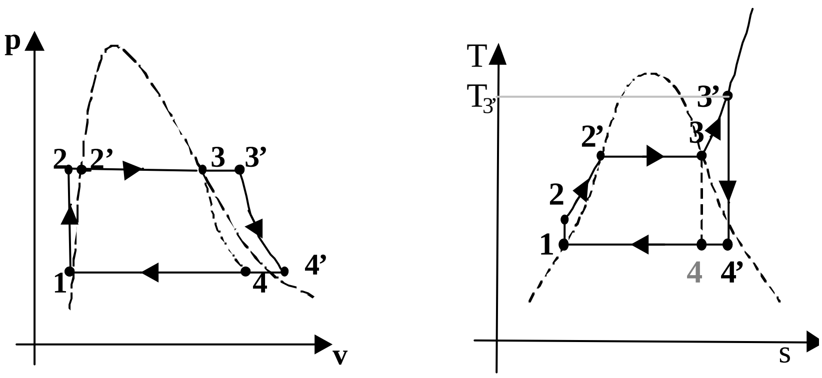

Fig.5 – diagrammi pressione-volume, temperatura entropia

E’ evidente che il valore del titolo nello stato **4’** è molto più vicino a 1.
La nuova formula per il coefficiente economico è:

$$å = \frac{h_{3'} - h_{4'} - (h_2 - h_1)}{h_{3'} - h_2} \qquad (16)$$

Per lo stato **3’** vale la formula:

$$h_{3'} = h_3 + c_p(T_{3'} - T_3) \qquad (17)$$

da cui ricaviamo il calore specifico medio a pressione costante $\mathbf{c_p}$, leggendo $\mathbf{h_{3'}}$ dalla tabella del vapore surriscaldato (o viceversa ricaviamo $\mathbf{h_{3'}}$ leggendo $\mathbf{c_p}$ dalla relativa tabella).
Per $\mathbf{h_{4'}}$ usiamo la (8), con $\mathbf{x_{4'}}$ ricavato da:

$$s_{3'} = s_{4'} \Leftrightarrow s_3 + c_p \ln\frac{T_{3'}}{T_3} = s_{l1} + x_{4'}\frac{r_4}{T_4} \qquad (18)$$

dove $\mathbf{s_3}$ è data dalla (10).

Esercizio numerico

Determinare il coefficiente economico per un ciclo di Rankine con surriscaldamento, date:

$\mathbf{T_1} = \mathbf{T_4} = 40$ °C
$\mathbf{T_2} = \mathbf{T_3} = 250{,}3$ °C
$\mathbf{T_{3'}} = 500$ °C

Da (17):

$$c_p = \frac{h_{3'} - h_3}{T_{3'} - T_3} = \frac{3445 - 2800{,}3}{500 - 250} = 2{,}57\frac{kJ}{kgK}$$

Da (18):

$$s_{3'} = s_3 + c_p \ln\frac{T_{3'}}{T_3} = 6{,}069 + 2{,}57 \ln\frac{773}{523{,}3} = 7{,}07\frac{kJ}{kg}$$

$$x_{4'} = \frac{s_{3'} - s_{11}}{\frac{r_4}{T_4}} = \frac{7{,}07 - 0{,}572}{\frac{2406{,}9}{313}} = 0{,}845$$

Da (8):

$$h_{4'} = h_{11} + r_4 x_{4'} = 167{,}5 + 2406{,}9 \cdot 0{,}845 = 2201{,}33 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Quindi, da (16):

$$\varepsilon = \frac{h_{3'} - h_{4'} - (h_2 - h_1)}{h_{3'} - h_2} = \frac{3442{,}8 - 2201{,}33 - (171{,}5 - 167{,}5)}{3442{,}8 - 171{,}5} = 0{,}378$$

Nota:

Per confrontare la macchina di Rankine con surriscaldatore e la macchina di Carnot, è sbagliato calcolare η_t come rapporto tra i coefficienti economici con

$$\varepsilon_c = 1 - \frac{T_1}{T_{3'}} = 1 - \frac{313}{773} = 0{,}595$$

Si otterrebbe 0,635: apparentemente peggio rispetto al caso della macchina di Rankine senza surriscaldatore!
L'errore sta nel fatto che si sta fornendo alla macchina di Carnot più calore di quello dato alla macchina di Rankine con surriscaldatore:

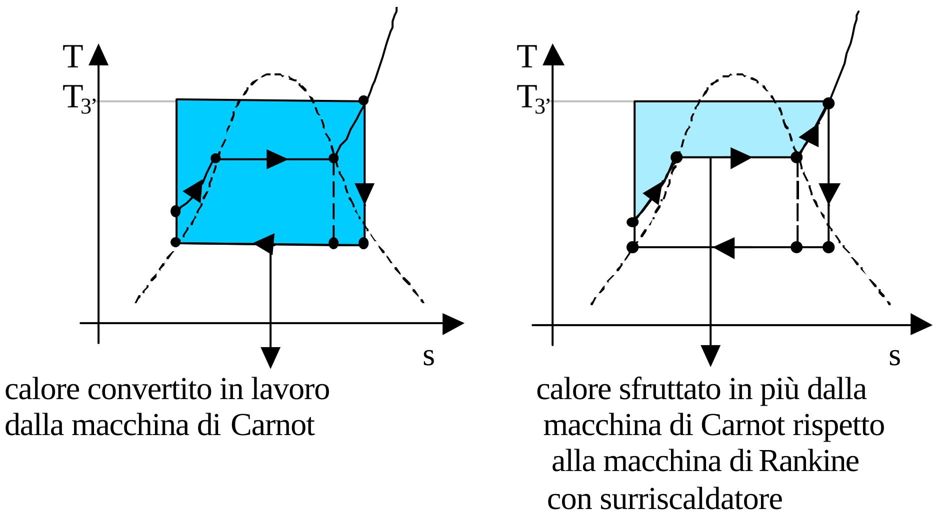

Fig.6 – confronto tra le quantità di calore

Bisogna guardare il diagramma che descrive l'andamento della temperatura del serbatoio caldo (fumi prodotti bruciando combustibile e aria) in funzione della quantità di calore da esso sottratta, e confrontare le due macchine in base alla quantità di calore che effettivamente riescono a sfruttare (exergia):

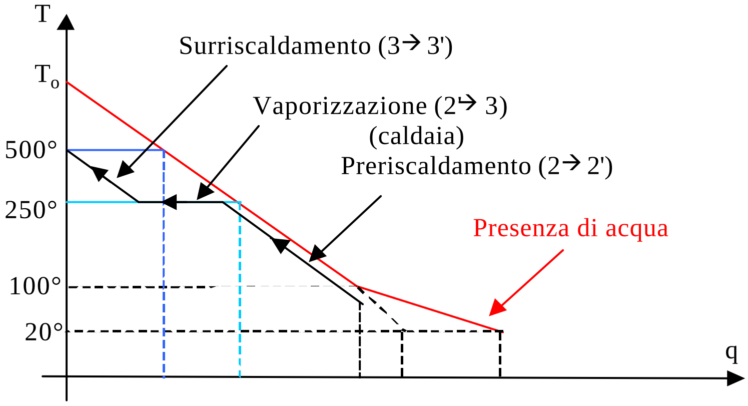

Fig.7 – in rosso: diagramma T-q del serbatoio caldo, in nero: trasformazione 2→3 nel ciclo di Rankine con surriscaldamento, in blu e celeste: due esempi di passaggi analoghi nel ciclo di Carnot

Concludendo, solo con un'infinita successione di cicli di Carnot si riesce ad estrarre tutto il calore dai fumi:

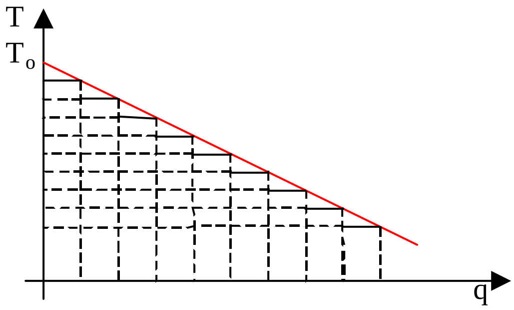

Fig.8 – estrazione totale del calore per mezzo di infiniti cicli di carnot

La macchina di Carnot sarebbe ottima se il serbatoio caldo fosse a temperatura costante.