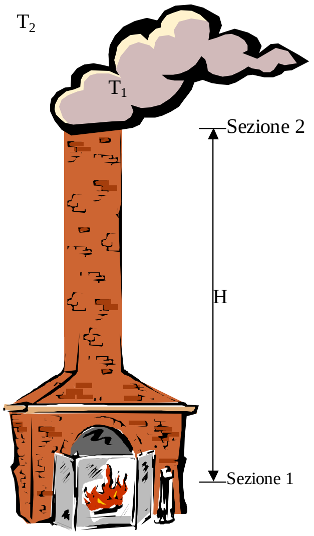
Lezione XXIII - 10/04/2003 ora 8:30-10:30 - “Esercizi tiraggio e sorbona ” - Originale di Marco Sisto.

Esercizio 1

Si consideri un impianto di riscaldamento a camino caratterizzato dai seguenti dati:



<u>Dati</u>

H=8m
T_1*=250°C*
T2=10°C
β*=1,5*

dove:
H è la differenza di quota tra il centro della bocca del camino e lo sbocco della canna fumaria
$\mathbf{T_1}$ è la temperatura del fumo prodotto dalla combustione della legna
$\mathbf{T_2}$ è la temperatura esterna
$\boldsymbol{\beta}$ è il coefficiente di perdite concentrate dell’intero sistema

Nel camino entra aria che viene riscaldata fino ad una temperatura di 250°C; l’aria calda,essendo più leggera del fluido circostante, sale lungo la canna fumaria. Si determini la velocità **W** dei fumi.

<u>Soluzione</u>

<u>Ipotesi:</u>

- La canna fumaria è sufficientemente isolata tanto da mantenere costante la temperatura del fumo lungo il tragitto
- Nel camino entra 4÷5 volte la quantità stechiometrica di aria che serve alla combustione dunque, ciò che verrà chamato fumo è in realtà un fluido che ha le stesse proprietà termodinamiche dell’aria.
- Si scelgono le sezioni,come in figura, in base alle quali si scriverà l’equazione del bilancio dell’energia.
- La canna fumaria solitamente non è rigorosamente verticale ma è costituita da raccordi e tratti inclinati dunque si assume una lunghezza $L = 8{,}5m > H$

Osservazione
Solitamente si trascura il salto di pressione relativo a una differenza di quota così effimera però, in questo caso, facendo questa semplificazione si arriverebbe all'assurdo di una velocità dei fumi pari a zero. Infatti la piccola differenza di pressione, dettata anche dal fatto che l'aria più calda del camino ha densità minore, funge da motore dell'impianto.

All'esterno del camino valgono le leggi della fluidostatica, dunque:

$$P_1 = P_2 + \rho_{est} gH \tag{1}$$

dove:
P1 è la pressione nella bocca del camino
P2 è la pressione esterna
ρ_{est} e la densità dell'aria esterna
g è l'accelerazione gravitazionale

Calcolo della densità dell'aria alle due temperature utilizzando l'equazione dei gas:

$$\begin{aligned} \rho_{est} &= \frac{P}{RT_2} = \frac{101325}{287 \cdot 283} = 1{,}2475 \frac{Kg}{m^3} \\ \rho_f &= \frac{P}{RT_2} = \frac{101325}{287 \cdot 283} = 1{,}2475 \frac{Kg}{m^3} \end{aligned} \tag{2}$$

dove:

ρ_f è la densità dei fumi
R è la costante universale dei gas

Dunque, valutata da fuori ho una differenza di pressione

$$P_1 - P_2 = \rho_{est} gH = 1{,}2475 \cdot 9.81 \cdot 8 = 97{,}9 Pa \tag{3}$$

è come avere una pompa con questa prevalenza.
Considerando che non esiste una pompa <u>fisica</u> che produce lavoro, si conoscono tutti i termini per poter scrivere l'equazione del bilancio energetico:

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + gH + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + R = 0 \tag{4}$$

si può operare una semplificazione dovuta alla scelta delle sezioni infatti, la bocca del camino ha una sezione molto più grande della sezione di sbocco della canna fumaria e quindi la velocità del fumo $\mathbf{W_1}$ è trascurabile rispetto a $\mathbf{W_2}$. Sostituendo la 3) nella 4) e sapendo che le perdite di carico sono espresse da

$$R = \xi\left(\frac{L}{D} + \beta\right)\frac{W^2}{2} \qquad (5)$$

otteniamo

$$\frac{W_2{}^2}{2}\left[1 + \xi\left(\frac{L}{D} + \beta\right)\right] = gH\left(\frac{\rho_{est}}{\rho_{\text{int}}} - 1\right) \qquad (6)$$

Dalla 6) si può ricavare la velocità dei fumi conoscendo il valore del fattore d'attrito di seguito calcolato.
Il secondo membro dell'equazione 6) costituisce il motore del sistema mentre, il primo membro è la resistenza da vincere; il camino avrà un buon tiraggio se il motore riesce a prevalere sulla resistenza.
La 6) è un'equazione con 2 variabili,dunque per risolverla si dovrà intraprendere una soluzione ricorsiva. Inizialmente si fissa una portata e a una velocità del fumo minima, per verificare che il motore sia sufficiente a realizzarla, successivamente si giunge al valore reale della velocità con metodo ricorsivo.
Supponendo che in 1 ora vengano bruciati 10Kg di legna e sapendo che la quantità stechiometrica di aria necessaria a bruciare 1Kg di legna è 14Kg, si può ricavare la portata in massa minima che il sistema deve avere:

$$\dot{M}_{fumi} = 14 \cdot 10 = 140\frac{Kg}{h} = 0{,}039\frac{Kg}{s} \qquad (7)$$

Dalla definizione di portata in massa e dalla 7) si ricava la velocità **W_{min}** dei fumi relativa alla portata minima:

$$W_{\min} = \frac{\dot{M}_{fumi}}{\rho_f \cdot A} = \frac{0{,}039}{0{,}675 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-2}} = 2.55\frac{m}{s} \qquad (8)$$

dove

$A = 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 2{,}25 \cdot 10^{-2}\, m^2$ è l'area della sezione di passaggio della canna fumaria

Per giungere al valore della resistenza minima del sistema si deve calcolare il fattore d'attrito e per questo serve il numero di Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{W_{\min} D}{\nu} = \frac{2{,}55 \cdot 0{,}15}{42{,}2 \cdot 10^{-6}} = 9064 \qquad (9)$$

dove

ν è la viscosità dell'aria a 250°C (coincide con quella del fumo)

Considerando la 9) e la scabrezza relativa della canna fumaria pari a $\frac{\varepsilon}{D} = 1{,}33 \cdot 10^{-2}$ si ricava il fattore di attrito sul diagramma di Moody:

$$\xi = 0{,}047 \tag{10}$$

Dunque la resistenza minima da vincere, che è il primo termine dell'equazione 6), è:

$$\frac{W_2^{\,2}}{2}\left[1+\xi\left(\frac{L}{D}+\beta\right)\right] = \frac{2{,}55^2}{2}\left(1+0{,}047\frac{8{,}5}{0{,}15}+1{,}5\right) = 16{,}8\frac{J}{Kg} \tag{11}$$

Il motore a disposizione, che è il secondo termine dell'equazione 6), è

$$gH\left(\frac{\rho_{est}}{\rho_{\text{int}}}-1\right) = 9{,}81\cdot 8\left(\frac{1{,}2475}{0{,}675}-1\right) = 66{,}6\frac{J}{Kg} \tag{12}$$

Si vede che il motore è sovrabbondante di un fattore ≅4 rispetto alla resistenza e ciò indica che la portata è maggiore di quella minima prevista.
Ne deriva che la velocità con cui esce il fumo dalla canna fumaria è maggiore di quella ipotizzata. Per calcolare la velocità reale bisogna eseguire ricorsivamente i seguenti passi:

1. calcolo del numero di Reynolds (utilizzando l'ultima velocità trovata)
2. calcolo del fattore di attrito (utilizzando il punto 1 e $\frac{\varepsilon}{D} = 1{,}33 \cdot 10^{-2}$)
3. calcolo della nuova velocità $\mathbf{W_2'}$
4. ritornare al punto 1.

I risultati di qualche iterazione sono riportati nella tabella seguente.

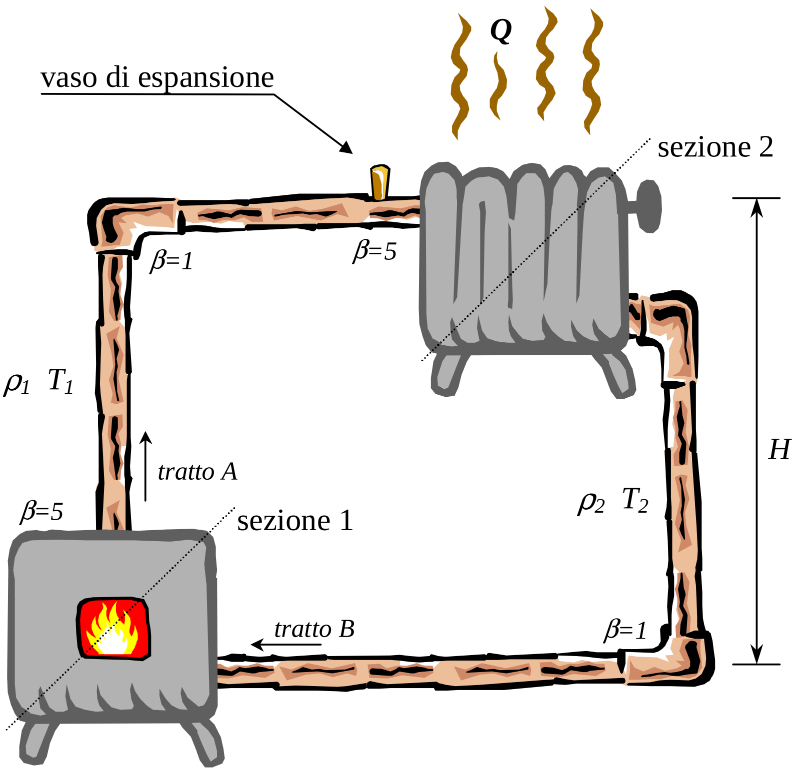
W_2	*Re*	ξ	W_2'
2,55	9064	0,047	5,08
5,08	18056	0,044	5,16
5,16	18358	0,043	5,19
5,19	18463	0,043	5,19

Si nota che dopo pochi cicli la velocità si stabilisce intorno ad un valore che è quello reale, naturalmente bisogna considerare un margine di errore su questo risultato in

quanto, l'ausilio del diagramma di Moody, non porta a valori esatti ma stimati da chi lo interpreta.
La velocità del fumo è circa doppia di quella minima necessaria cioè, nel camino entra più aria di quella che serve; bisogna notare che l'aria che fluisce dal camino è aria calda presente nell'ambiente dove il camino è installato e che una uguale quantità di aria fredda entra dall'esterno per compensare quella uscita. Concludendo non bisogna far aspirare dal camino più aria di quella che serve poiché l'aria fredda che entra raffredda l'ambiente. Dunque, bisogna intervenire sulla quantità di fumi uscenti utilizzando saracinesche nella canna fumaria o agendo sulle griglie di regolazione delle prese d'aria.

Esercizio 2

Si consideri un impianto di riscaldamento a circolazione naturale costituito da una caldaia e un corpo scaldante (termosifone). Si determini qual è la potenza termica (**Q**) che la caldaia da all'ambiente per mezzo del corpo scaldante.



$D = 0{,}05m$
$L = 100m$
$\varepsilon = 0{,}0001$
$H = 10m$
$T_1 = 80°C$
$T_2 = 40°C$

Il condotto del sistema è un tubo in ghisa molto grosso, rispetto ai tubi utilizzati nei normali impianti domestici, infatti, l'impianto a circolazione naturale non necessita dell'utilizzo di una pompa per far circolare l'acqua; il motore del sistema è la differenza di temperatura (**ΔT**) tra la temperatura dell'acqua che esce dalla caldaia (**T_1**) e la temperatura dell'acqua che esce dal corpo scaldante (**T_2**).

Si ipotizza che non ci siano dispersioni di calore dai tubi cosicché, la quantità di calore ceduta è solo quella dovuta al termosifone. Dunque, la differenza di temperatura tra l'acqua che entra e quella che esce dal termosifone è:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 70 - 50 = 20°C$$

La potenza termica che la caldaia da all'ambiente per mezzo del corpo scaldante è:

$$\dot{Q} = \dot{M}\left(h_2 - h_1\right) = \dot{M} \cdot c_l \left(T_2 - T_1\right) \qquad (1)$$

dove:

- $\left(h_2 - h_1\right)$ è il salto di entalpia
- $\dot{M}$ è la portata in massa (da ricavare)
- $c_l = 4187 \frac{J}{KgK}$ è il calore specifico dell'acqua

Per risolvere la 1) bisogna calcolare la portata in massa del sistema:

$$\dot{M} = \rho W A \qquad (2)$$

dove

- **ρ** è la densità dell'acqua
- **W** è la velocità del fluido (da determinare)
- **A** è l'area della sezione del condotto

Bisogna distinguere due diverse densità per il fluido del sistema poiché esso si trova a due temperature diverse:

- $\boldsymbol{\rho_1}$ relativo al tratto A (vedi figura pag. 11) a temperatura $\mathbf{T_1}$
- $\boldsymbol{\rho_2}$ relativo al tratto B (vedi figura pag. 11) a temperatura $\mathbf{T_2}$

Dalle tabelle del vapore si estraggono i valori del volume specifico dell'acqua alle diverse temperature, da cui si ricavano le densità:

$$\begin{array}{lcl} v_{l1} = 0{,}0010228 \frac{m^3}{Kg} & \rightarrow \quad \rightarrow & \rho_1 = \frac{1}{v_{l1}} = 977{,}7 \frac{Kg}{m^3} \\ v_{l2} = 0{,}0010121 \frac{m^3}{Kg} & & \rho_2 = \frac{1}{v_{l2}} = 998{,}0 \frac{Kg}{m^3} \end{array} \qquad (3)$$

verrà anche utilizzato un valore di densità medio:

$$\rho = 983 \frac{Kg}{m^3} \tag{4}$$

Per andare avanti con il problema bisogna calcolare la velocità che compare nel punto 2); il problema si risolve dividendo il circuito in due tratte:

- tratto A   dalla caldaia al termosifone, a cui è associata l'equazione 5)
- tratto B   dal termosifone alla caldaia, a cui è associata l'equazione 6)

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + gH + \frac{P_2 - P_1}{\rho_1} + R_A = 0 \tag{5}$$

$$\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} - gH + \frac{P_1 - P_2}{\rho_2} + R_B = 0 \tag{6}$$

Esplicitando (***P_2-P_1***) dalla 5) , (***P_1-P_2***) dalla 6) e sommando membro a membro si ottiene:

$$0 = (\rho_1 - \rho_2)\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + (\rho_1 - \rho_2)gH + \rho_1 R_A + \rho_2 R_B \tag{7}$$

Per le scelte delle sezioni adottate e considerando che la differenza tra le densità $\boldsymbol{\rho_1}$ e $\boldsymbol{\rho_2}$ è piccola, si può trascurare il primo termine del secondo membro della 7), mentre, <u>non</u> si può trascurare il secondo termine, poiché esso rappresenta il motore dell'impianto. Inoltre, davanti agli addendi che rappresentano le perdite di carico, viene sostituita la densità media $\boldsymbol{\rho}$ in modo da semplificare i calcoli; così facendo, la 7) diventa:

$$(\rho_2 - \rho_1)gH = \rho(R_A + R_B) = \rho\left(\xi \frac{L}{D} + \sum_j \beta_j\right)\frac{W^2}{2} \tag{8}$$

Da quest'ultima equazione si può ricavare la velocità da andare a sostituire nella 2) per il calcolo della portata in massa (che serviva nella (1) per soddisfare la richiesta del problema) ma, si nota che si tratta di un'equazione in due incognite (**W** e $\boldsymbol{\xi}$). Ancora una volta per risolvere il quesito si deve intraprendere un procedimento ricorsivo; a tale scopo si fissa una velocità di primo tentativo per eseguire il seguente ciclo:

1. calcolo (ipotesi se è il primo valore) della nuova velocità **W'**
2. calcolo del numero di Reynolds (utilizzando il punto 1)
3. calcolo del fattore di attrito (utilizzando il punto 2 e la scabrezza relativa)
4. ritornare al punto 1.

<u>Primo ciclo</u>

Si ipotizza una velocità sensata e si calcola il numero di Reynolds corrispondente:

$$W' = 0{,}5\frac{m}{s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{W'D}{\upsilon} = \frac{W'D}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}05\cdot}{\frac{5{,}497\cdot 10^{-4}}{983}} = 44706 \tag{9}$$

Utilizzando il diagramma di Moody, il valore della scabrezza relativa del condotto e la 9) si ricava il fattore d'attrito:

$$\xi = 0{,}027 \tag{10}$$

avendo utilizzato un valore di scabrezza relativa pari a:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}0001}{0{,}05} = 0{,}002 \tag{11}$$

Con il risultato dell'equazione 10) si riparte dal punto 1. del ciclo.
I risultati di qualche iterazione sono riportati nella tabella seguente.

W	***Re***	ξ	***W'***
0,5	44706	0,027	0,344
0,344	30758	0,028	0,342
0,342	30558	0,028	0,342

Dopo pochi cicli la velocità si stabilisce intorno al un valore che viene utilizzato per calcolare la portata in massa del sistema:

$$\dot{M} = \rho W A = 983\cdot 0{,}342\cdot \pi\frac{D^2}{4} = 0{,}660\frac{Kg}{s} \tag{13}$$

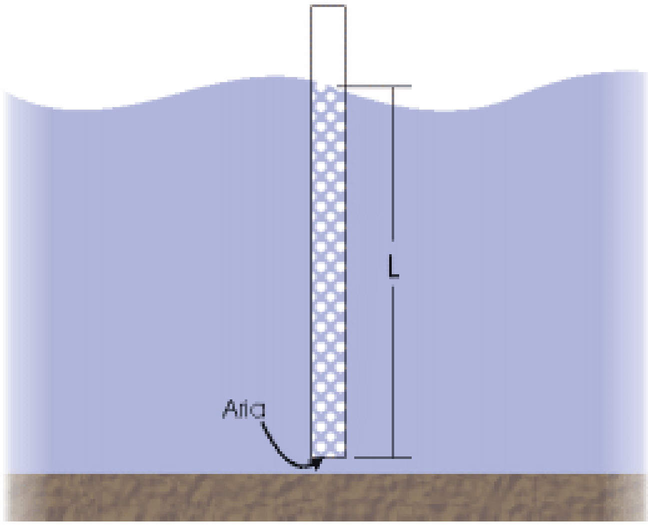
Infine, per la 1), la potenza termica cercata è:

$$\dot{Q} = \dot{M}\cdot c_l\left(T_2 - T_1\right) = 0{,}660\cdot 4187\cdot\left(80-40\right) = 110536{,}8W \tag{14}$$

Utilizzando l'equazione 13) e l'equazione 14) si vede che se si dispone di condotti a sezioni piccole ci sarà bisogno di differenze di temperature più elevate per ottenere gli stessi risultati in termini di potenza termica.

Esercizio 3

Determinare la portata in massa d'acqua della sorbona, al corrente dei seguenti dati:



L = 10 m
D = 0.5 m (diametro del tubo)
ε = 0.05 mm
$\dot{V} = 1\,l/s = 1 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$ (Portata in volume d'ari

DATI TABULATI:
$\nu = 10^{-6}\ m^2/s$ (viscosità cinematica dell'acqua)
$\rho_{acqua} = 1000\ Kg/m^3$ (densità dell'acqua)
$\rho_{aria} = 1.03\ Kg/m^3$ (densità dell'aria a 20 °C)

Soluzione

Prima di tutto è importante capire secondo quale principio fisico funziona la sorbona: l'aria immessa dalla base sotto forma di piccole bollicine e l'acqua all'interno del tubo vengono considerate un unico fluido di densità inferiore a quello della sola acqua. Spinto dalla differenza di pressione il fluido misto sale verso la superficie.

Questo tipo di pompa viene utilizzato per esempio in mare per aspirare acqua quando la presenza di agenti in sospensione o di sabbia potrebbe interferire con il funzionamento di pompe meccaniche convenzionali.

Il problema principale nel formalizzare il meccanismo prima descritto è che salendo l'aria si espande per cui la densità del fluido diminuisce. Per i nostri calcoli impostiamo perciò due metodi risolutivi: nel primo, non considerando questa variazione di desità, troveremo una soluzione che a rigore sarà valida solo un un tratto infinitesimo all'inizio della sorbona. Successivamente useremo il risultato trovato come punto di partenza per un calcolo che comprenda la variazione di densità.

Un'approssimazione comune ai due metodi sarà di non tenere conto del differenziale di velocità fra acqua e aria: si ammetterà quindi che il fluido si comporti come se fosse omogeneo. Inoltre i calcoli funzionano bene finchè non intervengono termini di perdite di carico dovuti a turbolenze per la presenza di troppa aria rispetto all'acqua nel tubo. Il fluido misto è quindi quasi completamente acqua.

Primo metodo:

Impostiamo l'equazione di Bernoulli tenendo conto che, se non consideriamo l'espansione dell'aria, il fluido si mouve con la stessa velocità per tutta la sorbona. Inoltre la differenza di pressione fra le imboccature è data dalla legge di Stevino:
$\Delta P = \rho_{acqua} \cdot g \cdot h$
L'equazione di Bernoulli viene:

$gh - \frac{\rho_{acqua} gh}{\rho_{fluido}} + R = 0$ dove $R = \xi \frac{L}{D}\frac{W^2}{2}$.

Prima di tutto $\rho_{fluido} = \frac{\dot{M}_{acqua} + \dot{M}_{aria}}{\dot{V}_{acqua} + \dot{V}_{aria}}$ dove $\dot{V}_{aria} = 0.001$ m^3/s, $\dot{V}_{acqua} = \frac{\dot{M}_{acqua}}{\rho_{acqua}}$ e per la stessa equazione è nota $\dot{M}_{aria}$. Per cui ρ_{fluido} rimane funzione solo di $\dot{M}_{acqua}$, a sua volta funzione della velocità di salita: $\dot{M}_{acqua} = \rho_{acqua} WS$

Come al solito per calcolare ξ abbiamo bisogno del numero di Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{WD}{\nu}$. Per poter procedere al calcolo per ricorsione impostiamo primi calcoli e mettiamo insieme le equazioni di cui disponiamo (ε/D = 0.0001):

$$\dot{M}_{acqua} = 785W$$
$$\rho_{fluido} = \frac{785000W + 1.3}{785W + 1}$$
$$W = \sqrt{\frac{\frac{98100}{\rho_{fluido}} - 98.1}{10\xi}}$$
$$R = 10\xi \cdot W^2$$
$$Re = 50000W$$

Scegliamo una prima velocità di tentativo di 0.7 m/s (ragionevole). Iterando si ottiene un risultato di W = 0.82 m/s e una densità del fluido ρ_{fluido}= 998.47 Kg/m^3 ovvero come se il fluido fosse quasi tutta acqua, come previsto. Questo comporta una portata in massa di fluido pari a $\rho_{fluido}WS$ = 642,715 Kg/s che sono certo una grande quantità, anche se bisogna considerare che il tubo ha diametro di 50 cm. Questa è anche con buona approssimazione la portata in massa d'acqua perchè l'aria contribuisce solo per 0.0013 Kg/s sui più di 600.

Secondo metodo:

Consideriamo ora la variazione di desità del fluido. Impostare completamente il problema comporterebbe risolvere equazioni differenziali non facili quindi ci limiteremo a valutare un densità media e una velocità media di salita. Anche la velocità di salita del fluido infatti varia perchè l'aria espandendosi sale più velocemente. L'equazione di Bernoulli diventa:

$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + gh - \frac{\rho_{acqua} gh}{<\rho_{fluido}>} + <R> = 0$. I termini fra parentesi angolari sono valori medi sulla variazione lungo tutta la sorbona. Cerchiamo di rendere tutto funzione della W_2, in modo da poter poi procedere con il metodo ricorsivo.

Prendiamo come valore di W_1 quello calcolato prima: 0.82 m/s e lo stesso vale per $\rho_{fluido, iniziale}$ = 998.47 Kg/m^3. Si ha comunque:

$$< \rho_{fluido} >= \frac{\rho_{iniziale} + \rho_{finale}}{2}$$

Per calcolare $\rho_{fluido,\ finale}$ consideriamo che vale $\rho_{fluido} = \frac{\dot{M}_{acqua} + \dot{M}_{aria}}{\dot{V}_{acqua} + \dot{V}_{aria}}$ dove $\dot{V}_{aria}$ questa volta cambia, per esempio linearmente al variare della pressione (isotermicamente): $\dot{V}_{aria,\ finale} = \frac{P_1}{P_2}\dot{V}_{aria,\ iniziale}$. Se la sorbona è alta 10 m il rapporto fra le pressioni vale 2 dato che la pressione atmosferica è di circa 1 atm e ogni 10 m la pressione dell'acqua aumenta di 1 atm. A 10 m di profondità vi sono quindi 2 atm di pressione. Il valore di $\dot{M}_{aria}$ è fissado dai dati e non varia. Diversamente $\dot{M}_{acqua}$ e $\dot{V}_{acqua} = \frac{\dot{M}_{acqua}}{\rho_{acqua}}$ dipendono dalla velocità di salita dell'acqua: $\dot{M}_{acqua} = \rho_{acqua} WS$. Per calcolare i valori finali saranno tutte funzioni di W_2.

Anche < R > va calcolata in base alla < W >, anche se ricordando che $< W >= \frac{W_2 + W_1}{2}$, si riesce a renderla funzione solo di W_2 (W_1 = 0.82 m/s). Stesso ragionamento anche per il numero di Reynolds: $\mathrm{Re} = \frac{D}{\nu} < W >= 50000\frac{W_2 + W_1}{2} = 25000 \cdot W_2 + 20500$. Le equazioni che abbiamo a disposizione sono ora tutte funzioni di W_2:

ε/D = 0.0001

$$\mathrm{Re} = 25000 \cdot W_2 + 20500$$

$$< \rho >= \frac{1568799 \cdot W_2 + 1998.24}{1570 \cdot W_2 + 4}$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{196200}{< \rho >} - 195.38 - 2R}$$

$$R = 2.5 \cdot \xi (W_2 + 0.82)^2$$

Scegliamo come W_2 di prova proprio il valore di W_1 = 0.82 m/s. Iterando si ottiene il valore ragionevole di W_2 = 0.945 m/s per una < ρ > = 997.88 kg/m^3. La < W > cercata è allora 0.8825 m/s da cui la portata in massa di fluido (che è circa quella dell'acqua) di 691,29 kg/s. Come ci si aspettava viene leggermente superiore.