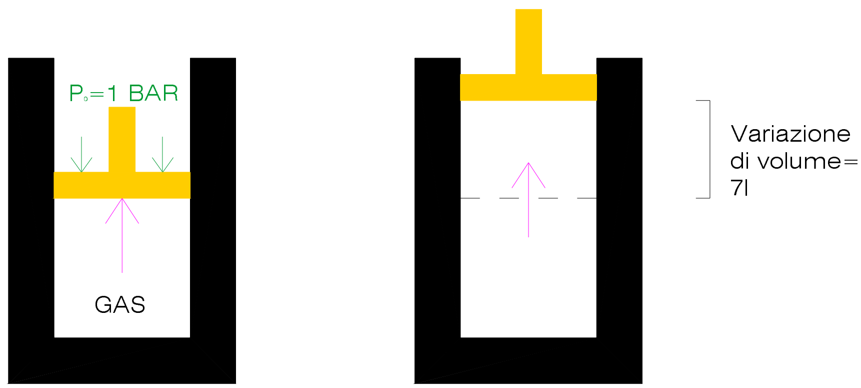
Esercizio 1):

Si vogliono considerare tre diversi tipi di espansione che possono avvenire all' interno di un cilindro pieno di gas, al quale viene ceduto calore, dotato di un pistone scorrevole di massa trascurabile ma soggetto alla pressione esterna P_0 =1 BAR. Di queste tre trasformazioni si vuole calcolare il lavoro L e il calore Q prodotti.



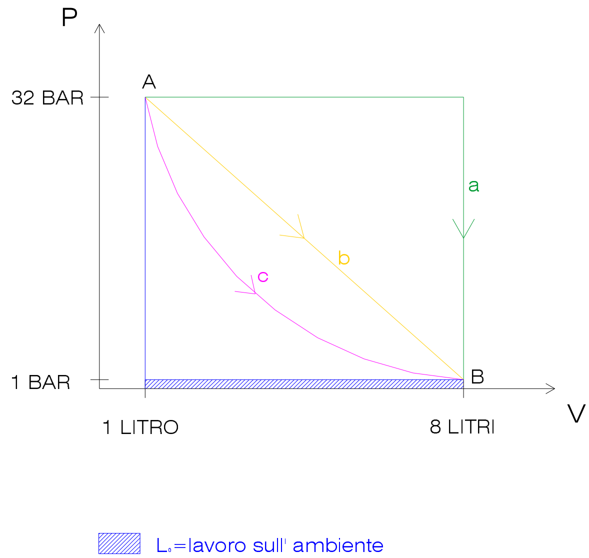
Si tratta di tre tipi di trasformazioni diverse:

_a) pressione costante per poi far cadere la pressione verticalmente fino al livello finale aprendo una valvola;

_b) trasformazione rettilinea con perdita di pressione e aumento di volume costanti fino al livello finale;

_c) trasformazione che segue l' andamento della curva adiabatica.

Lezione del giorno 08/11/02 dalle ore 10:30 alle ore 12:30



Ricordando che per le trasformazioni adiabatiche è vero che pV^n=costante diciamo che *n*=5/3 dove *n* è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante del nostro gas.

Risoluzione

Conviene iniziare a risolvere il caso c, ovvero la trasformazione adiabatica, di cui a noi sono note le leggi che ne regolano la trasformazione.

Caso c): Q_c **?** L_c **?**

Essendo questa una trasformazione adiabatica è noto che la produzione di calore è nulla quindi

$Q_c = 0$. Mentre l' equazione del lavoro è nota essere $L_c = \dfrac{p_A V_A - p_B V_B}{5/3 - 1}$ ma prima di risolverla

è necessario trasformare alcune misure bastarde:

1BAR=100.000Pa 32BAR=3.200.000Pa

1l=0,001 m^3 8l=0.008 m^3 quindi:

$$L_c = \frac{3.200.000 \cdot 0{,}001 - 100.000 \cdot 0.008}{2/3} = 3600\,\mathrm{J}$$

Per i due casi restanti sarà sufficiente ricondurci alla funzione di stato del primo principio della termodinamica (una equazione di stato è una grandezza termodinamica il cui valore, relativo allo stato A, dipende soltanto dalle variabili termodinamiche che descrivono A. Di conseguenza una funzione termodinamica *f* è funzione di stato se e soltanto se la sua variazione Δf nel corso di una trasformazione AB dipende soltanto dai due stati A e B e non dalla particolare forma della curva AB).

$U_B - A_A = Q - L$ dove $U_B - U_A$ = variazione di energia interna

Dalla trasformazione c) si ottiene quindi:

$U_B - U_A = -3.600\,\mathrm{J}$

Caso a): Q_a**?** L_a**?**

Nel caso della trasformazione lungo a) il lavoro corrisponde all' area del rettangolo sotteso tra la linea verde del grafico e l' asse X, quindi:

$$L_a = (V_B - V_A) \cdot (p_A) = (0{,}008 - 0{,}001) \cdot 3.200.000 = 22.400\,\mathrm{J}$$

Si vede chiaramente che la quantità di lavoro necessaria in questa trasformazione per raggiungere lo stesso volume rispetto alla trasformazione precedente è molto maggiore.

Per trovare il calore prodotto ci rifaremo nuovamente all' equazione del primo principio:

$$Q_a = L_a - (U_B - U_A) = 24.000 - 3.600 = 18.800\,\mathrm{J}$$

Caso b): Q_b**?** L_b**?**

Nel caso della trasformazione rettilinea lungo b) il lavoro corrisponde all' area del triangolo sotteso tra la linea gialla del grafico e l' asse X, quindi:

$$L_b = \frac{(p_A + p_B) \cdot (V_B - V_A)}{2} = \frac{(3.200.000 + 100.000) \cdot (0{,}008 - 0{,}001)}{2} = 11.550\,\mathrm{J}$$

E ancora come prima andremo a calcolare il calore prodotto:

$$Q_b = L_b - (V_B - A_A) = 11.550 - 3.600 = 7.950\,\mathrm{J}$$

Abbiamo così dato una risposta a tutti i nostri quesiti anche se in realtà non abbiamo considerato il lavoro prodotto sull' ambiente dalle nostre trasformazioni che è uguale per tutte e tre ed è rappresentato dall' area del rettangolo blu nel grafico e per questo facilmente calcolabile:

$$L_0 = p_0 \cdot (V_B - V_A) = 100.000 \cdot (0{,}008 - 0{,}001) = 700\,\mathrm{J}$$

Si possono così ora calcolare i lavori netti prodotti dalle tre trasformazioni:

$$L_a\,\mathit{netto} = 22.400 - 700 = 21.700\,\mathrm{J}$$

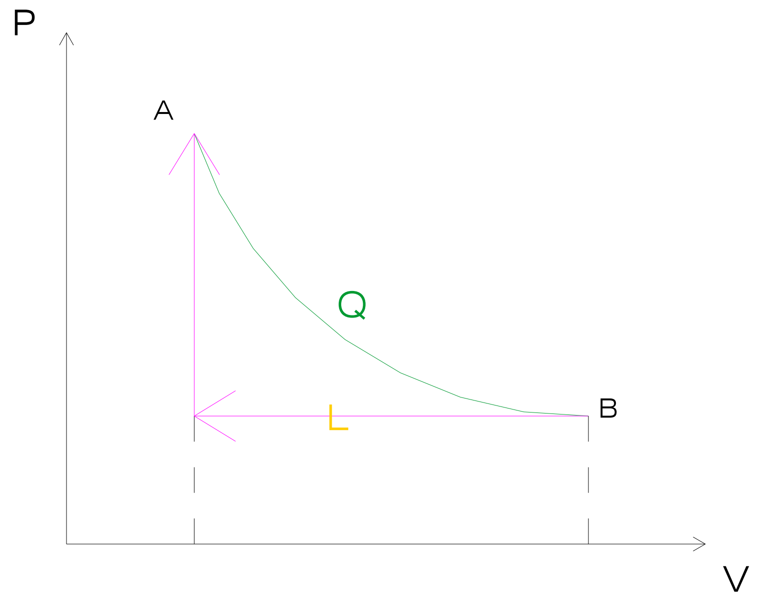
$$L_b\,\mathit{netto} = 11.550 - 700 = 10.850\,\mathrm{J}$$

$$L_c\,\mathit{netto} = 3.600 - 700 = 2.900\,\mathrm{J}$$

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

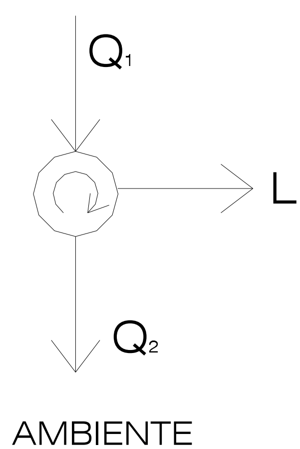
Guardiamo cosa dice l' enunciato di Clausius: è impossibile avere un processo il cui unico risultato sia quello di trasformare calore in lavoro.

Apparentemente sarebbe facile smentire questa affermazione, basterebbe prendere in esame la curva isoterma per contraddire quanto detto:



ma in realtà l' enunciato di Clausius ha in se soltanto una piccola imprecisione, da per scontato che dopo la trasformazione si torni allo stato fisico di partenza, cosa impossibile senza perdita di calore, ma il tornare allo stato iniziale (macchina ciclica) è assolutamente fondamentale nella vita concreta. Proviamo quindi a riformulare in maniera più precisa l' affermazione precedente:***è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di assorbire una determinata quantità di calore da un' unica sorgente di calore e trasformarla integralmente in lavoro*** (enunciato di Lord Kelvin).

Guardiamo ora come funziona una macchina ciclica:

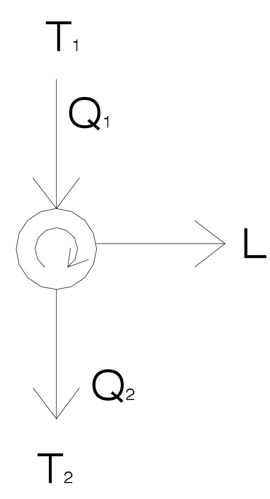


fornisco calore Q_1 alla macchina che produce il lavoro L e il calore di scarto all' ambiente Q_2 per poi tornare allo stato fisico di partenza per poter ricominciare daccapo. Senza questa dispersione di calore a favore del refrigerante non sarebbe quindi possibile comprimere il fluido e concludere il ciclo. Per indicare qual' è la qualità della macchina termica, cioè quanto questa è capace di convertire calore in lavoro, definiamo una nuova grandezza termodinamica, il rendimento. Il rendimento di una macchina termica è definito come il rapporto

$$\eta = \frac{L_{Tot}}{Q_1}$$

tra il lavoro totale L_{Tot} prodotto dalla macchina in un ciclo e la quantità di calore Q_1 che ad ogni ciclo bisogna fornire alla macchina. Il rendimento di conversione ottenuto del quoziente lavoro-calore si dice coefficiente economico ε.
Carnot è riuscito a stabilire il valore del coefficiente economico limite per una macchina termica che lavora tra due sorgenti di calore:

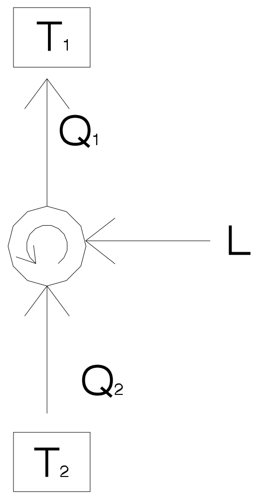
$\varepsilon_C = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$ questo coefficiente dipende quindi dalla temperatura dell' abbiente d'ingresso del calore e da quella di uscita, il valore delle temperature deve naturalmente essere espresso in Kelvin $T^{C^0} = T^K - 273{,}15$



La macchina di Carnot è dunque una macchina termica ciclica e invertibile, quindi una macchina calorifera e frigorifera a seconda del verso del ciclo.

Una pompa di calore è appunto una speciale macchina termica a cui viene fornito calore perché essa ne possa assorbire dall' ambiente raffreddandolo. Questa macchina può essere usata sia per riscaldare che per raffreddare un locale (basta invertirne il ciclo) ed è di gran lunga il sistema più ecologico per farlo dato che appunto sottrae calore all' ambiente anziché inquinarlo cedendogliene, il problema è che per fare questo bisogna fornirle molto lavoro meccanico sotto forma di elettricità.

Ora esaminiamo meglio il ciclo inverso:



è necessario fornire alla macchina un lavoro L perché essa possa sottrarre all' ambiente di temperatura T_2 la quantità di calore Q_2 e scaldare l' ambiente a temperatura T_1 con una quantità di calore $Q_1 = Q_2 + L$.
A questo punto però è necessario differenziare due diversi tipi di rendimento che saranno un rendimento frigorifero (utile in estate per rinfrescare i locali) ed un rendimento di prestazione (utile in inverno per riscaldarli).

Il rendimento frigorifero è definito come $\eta_F = \dfrac{Q_2}{L}$ ed è sempre >1,

il rendimento di prestazione è definito invece come $COP = \dfrac{Q_1}{L}$ ma siccome vale che

$Q_1 = Q_2 + L$ lo si può riscrivere come $COP = \dfrac{Q_2 + L}{L} = \dfrac{Q_2}{L} + \dfrac{L}{L} = \dfrac{Q_2}{L} + 1 = \eta_F + 1$, risulta evidente che anche il COP sarà >1, questo è vero perché si sottrae calore all' aria, proviamo a fare un piccolo esempio:

$L = 10.000\ \text{J}$

$Q_2 = 20.000\ \text{J}$

$Q_1 = 30.000\ \text{J}$

$$\eta_F = \frac{Q_2}{L} = \frac{20.000}{10.000} = 2$$

COP=2+1=3

In realtà questi risultati sono maggiori di 1 perché frutto del quoziente fra due grandezze non omogenee quindi il valore che mi dice realmente qual' è la qualità della macchina è il rapporto tra il calore che ho ottenuto con questa macchina e quanto ne avrei ottenuto con la macchina di Carnot:

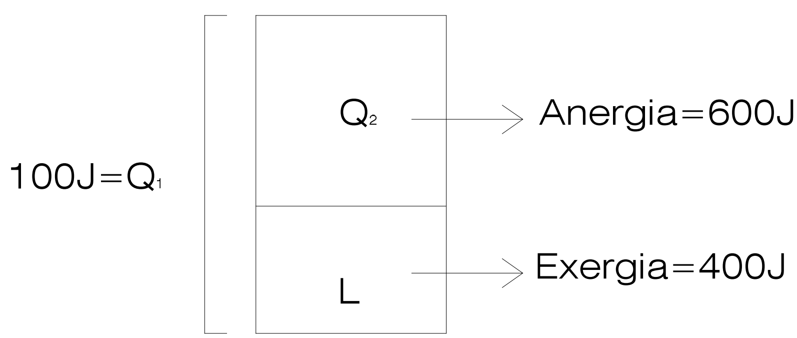
$$COP_C = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{1 - T_2/T_1} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

ponendo che nel nostro caso sia $COP_C = 5$ si avrà un coefficiente exergetico

$$\eta_{Ex} = \frac{COP}{COP_C} = \frac{3}{5} < \mathbf{1}$$

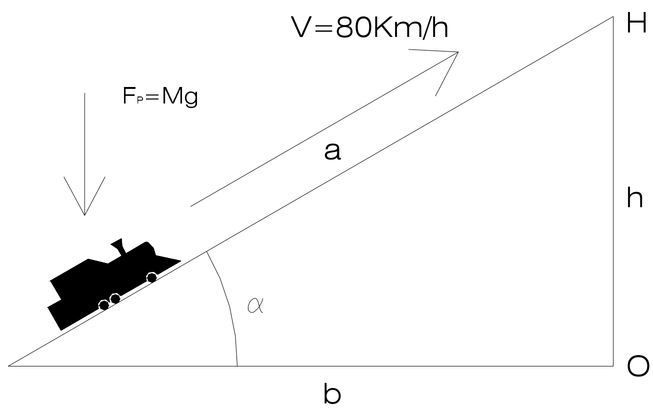
L' exergia è quindi quella parte di energia convertibile in lavoro e si contrappone all' anergia che è invece quella parte di energia che si trasforma in calore destinata a disperdersi nell' ambiente.

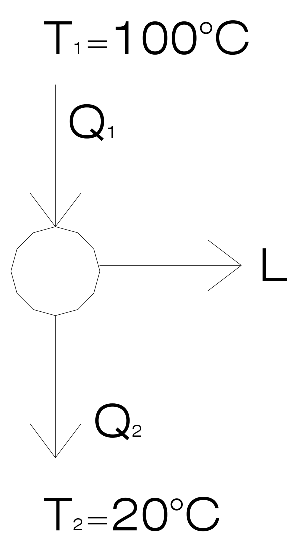
ESEMPIO



Esercizio 2):

Proviamo a risolvere un esercizio in cui si parla di una locomotiva (macchina a vapore) di massa M pari a 100.000Kg che si muove ad una velocità costante di 80Km/h lungo un pendio che forma un angolo α con la linea dell' orizzonte. Si vuole determinare quanto la stessa si sarà mossa verticalmente nel tempo di un' ora e quale sarà l' angolo massimo che potrà superare sapendo che la caldaia ha una temperatura di esercizio pari a 100°C mentre la temperatura esterna è di 20°C, si conosce in oltre che $\eta_T = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_C} = 25\,\%$ e che il carbone di cui se ne dispone per una massa pari a 1.000Kg ha un potere calorifico $P_c = 14.000\,BTU/libra$.





Risoluzione:

Prima di iniziare conviene convertire alcune misure in unità bastarde in altre in unità riconosciute:
1BTU (British thermal unit è la quantità di calore necessaria a far aumentare di un grado F una libbra d' acqua) è pari ad 1KJ
1libbra=0.4536Kg
20°C=293,15K
100°C=373,15K

Lezione del 08/11/02 dalle ore 10:30 alle ore 12:30

Iniziamo a calcolare il potere calorifico della nostra massa di carbone

$$Q_1 = 1.000 Kg \cdot 14.000 \cdot \frac{KJ}{lb} \cdot \frac{1 lb}{0,4536 Kg} = 30.864.197 KJ$$

Calcoliamo poi il rendimento reale della locomotiva:

$\varepsilon = 0,25 \qquad \varepsilon_C = 0,25 \cdot \left(1 - \frac{293}{373}\right) = 0,054$ il lavoro sarà quindi

$$L = \varepsilon_C \cdot Q_1 = 0,054 \cdot 30.864.197 = 1.760.000 KJ$$

L' energia potenziale della locomotiva sarà data invece dalla formula

$E_{potenziale} = L = M \cdot g \cdot h$ da cui $h = \frac{L}{M \cdot g} = \frac{1.760.000.000 J}{100.00 Kg \cdot 9.81 \, m/s^2} = 1790 m$

Abbiamo così dato risposta al primo quesito, andiamo adesso a calcolare l' angolo massimo di superamento:

$$h = a \cdot sen\,\alpha \qquad \alpha = arcsen\frac{h}{a} = arcsen\frac{1790}{80.000} = 1,3°$$

per una pendenza se calcolata su h/a pari a $\frac{1790}{80.000} = 0,022375 = 2,2375\%$

o pari a $\frac{1790}{79.980} = 0,02238 = 2,238\%$ se calcolata su h/b trovando b col teorema di Pitagora

$$b = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{80.000^2 - 1790^2} = 79.980 m$$