RESISTENZE TERMICHE IN SERIE ED IN PARALLELO

Introduzione:

Quando due o più resistori sono disposti in un circuito consecutivamente uno all' altro in modo da essere attraversati dalla stessa intensità di corrente, diciamo che essi o le loro resistenze sono collegati in *serie*. Il circuito in figura 1 è formato da una pila, due resistori costituiti da una lampadina ad incandescenza e da un filo conduttore di resistenza rispettivamente R_1 e R_2 ed un interruttore I ; chiudendo il circuito i due resistori sono attraversati da una corrente avente la stessa intensità *i*.

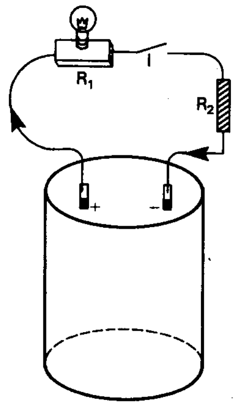

Figura 1

Nella figura 2 è rappresentato simbolicamente lo stesso circuito. Siano $V_A - V_C$ la d.d.p. agli estremi dei due resistori ed *i* l' intensità di corrente. Vogliamo ora determinare la resistenza *R* dell' unico resistore che è necessario inserire tra i punti *A* e *C* del circuito considerato affinché con la stessa d.d.p. $V_A - V_C$ esso sia attraversato da una corrente avente la stessa intensità *i*. Questa resistenza è definita resistenza equivalente del sistema delle due resistenze R_1 e R_2 collegate in serie.

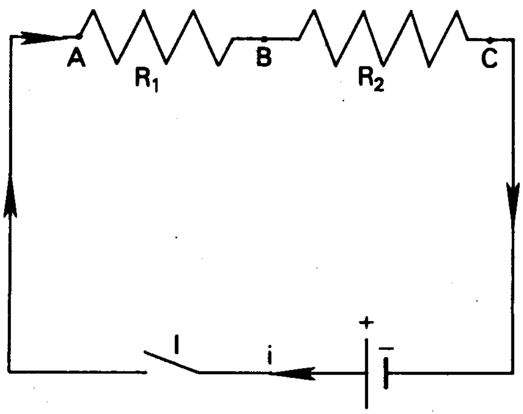

figura 2

Una carica che si muove nel circuito di figura 2 da *A* a *C* passa dal potenziale V_A nel punto *A* al potenziale V_C in *C* attraverso due cadute di tensione sulle resistenze R_1 ed R_2 che per la prima legge di Ohm sono rispettivamente $R_1 \cdot i$ ed $R_2 \cdot i$. Si ha perciò:

$$V_A - R_1 i - R_2 i = V_C \tag{1}$$

da cui:

$$V_A - V_C = (R_1 + R_2)i \tag{2}$$

In modo analogo, applicando la prima legge di Ohm alla resistenza equivalente, si ha:

$$V_A - V_C = Ri \tag{3}$$

dal confronto delle (2) e (3) segue:

$$R = R_1 + R_2 \tag{4}$$

Cioè la resistenza equivalente di due resistenze R_1 e R_2 collegate in serie è uguale alla somma delle singole resistenze.

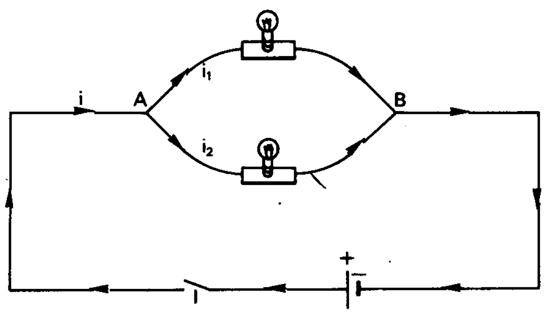

figura 3

La figura 3 mostra due lampadine collegate in *parallelo;* la d.d.p. agli estremi assume per entrambe lo stesso valore $V_A - V_B$. Due o più resistori sono collegati in parallelo se la d.d.p. ai loro estremi assume lo stesso valore per entrambi.

La figura 4 è la rappresentazione simbolica di un circuito in cui sono inserite due resistenze R_1 ed R_2 collegate in parallelo.

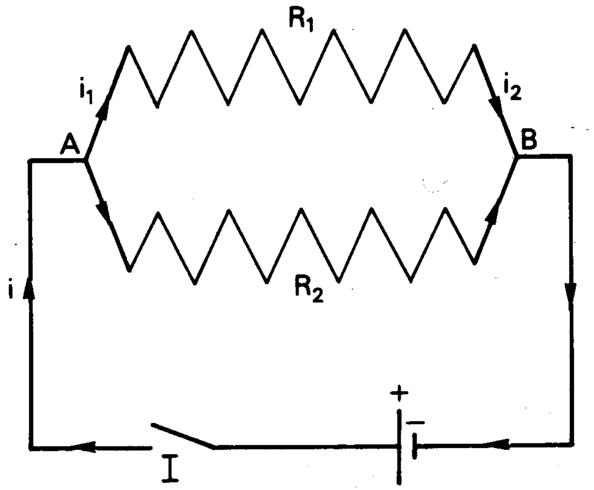

figura 4

I punti A e B sono chiamati *nodi.*

La corrente complessiva i che attraversa il circuito, giunta nel nodo A, si dirige in parte verso R_1 e in parte verso R_2.

La somma delle correnti che giungono in un nodo è uguale alla somma delle correnti che se ne allontanano, oppure (attribuendo un segno alle correnti che arrivano ed il segno opposto a quelle che escono dallo stesso nodo), la somma algebrica delle correnti in un nodo è uguale a zero.

Se indico con i l' intensità di corrente totale del circuito di fig. 4 cioè l' intensità di corrente che giunge al nodo A e con i_1 e i_2 l' intensità di corrente che attraversano rispettivamente R_1 e R_2 si ha:

$$i = i_1 + i_2 \tag{5}$$

Come prima, definiamo resistenza equivalente al sistema delle resistenze R_1 e R_2 l' unica resistenza R che è necessario inserire tra i punti A e B per non alterare le condizioni del circuito; perciò, se tra i punti A e B è inserita al posto del sistema di R_1 e R_2 la resistenza equivalente, il circuito è attraversato sempre dalla corrente di intensità i. Le intensità di correnti che attraversano R_1 e R_2 sono per la prima legge di Ohm:

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1} \; ; \; i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} \tag{6}$$

D' altra parte per la stessa prima legge di Ohm, applicata alla resistenza equivalente si ha:

$$i = \frac{V_A - V_B}{R} \tag{7}$$

Sostituendo i valori delle correnti espressi dalle (6) e (7) nella (5) si ha:

$$\frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

e semplificando:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

cioè il reciproco della resistenza equivalente di due o più resistenze collegate in parallelo è uguale alla somma dei reciproci delle singole resistenze. Come caso particolare, se $R_1 = R_2$, è $R = R_1 / 2$ cioè la resistenza equivalente di due resistenze uguali collegate in parallelo è uguale alla metà di ciascuna delle due. Osserviamo ancora che dalle (6) segue:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{8}$$

cioè l' intensità delle correnti che percorrono due resistori collegati in parallelo sono inversamente proporzionali alle loro resistenze.

Casi particolari:

Si cerchi ora l' espressione della resistenza termica in alcuni casi particolari:

Si abbia una parete in cui:

- $T_A = 20°C$
- $T_B = 0°C$

- $h_1 = 5.5cm$
- $h_2 = 1.5cm$
- Q = ?
- La malta ha $\lambda_2 > \lambda_1$

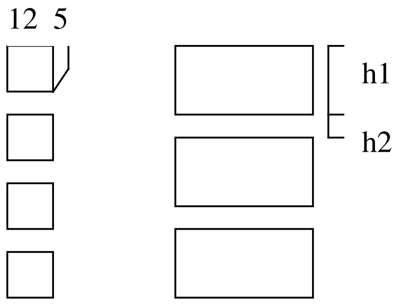

figura 1

$$(h_1 + h_2) \times N = h_{TOT}(3m)$$
$$N = \frac{300}{7} = 42.86$$

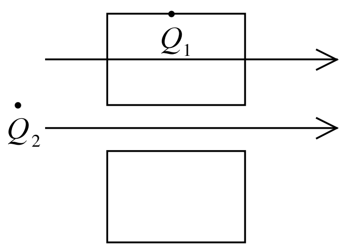

figura 2

S = $5 \cdot 3 = 15cm^2$

$$\dot{Q}_1 = (0.055 \cdot 5) \cdot 20 \cdot \frac{\lambda_1}{L}$$

- $\lambda_1 = 0.5 \frac{W}{mK}$
- $\lambda_2 = 1.5 \frac{W}{mK}$

$$\dot{Q}_1 = 0.055 \cdot 5 \cdot 20 \cdot \frac{0.5}{0.12} = 22.917W$$
$$\dot{Q}_2 = 0.015 \cdot 5 \cdot 20 \cdot \frac{1.5}{0.12} = 18.75W$$
$$Q_{1CORSO} = 41.67w$$
$$Q_{TOT} = 41.67 \cdot 42.86 = 1786W$$

Abbiamo un altro modo per calcolare il numero dei corsi; con le resistenze.

$$R_1 = \frac{L}{\lambda_1 \cdot S_2} = \frac{0.12}{0.5 \cdot 0.055 \cdot 5} = 0.873 \frac{K}{W}$$

$$R_2 = \frac{L}{\lambda_2 \cdot S_2} = \frac{0.12}{1.5 \cdot 0.015 \cdot 5} = 1.07 \frac{K}{W}$$

$$R_{TOT} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} + \frac{1}{\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0.873}} + \frac{1}{\frac{1}{1.07}} = 0.4807 \frac{K}{W}$$

$$Q_{1CORSO} = \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{20}{0.4807} = 41.6 \frac{K}{W}$$

I flussi tendono a stabilirsi lungo le linee di minor resistenza, dato che ho due risultati, il più corretto è quello più alto.

Vediamo ora il seguente caso:

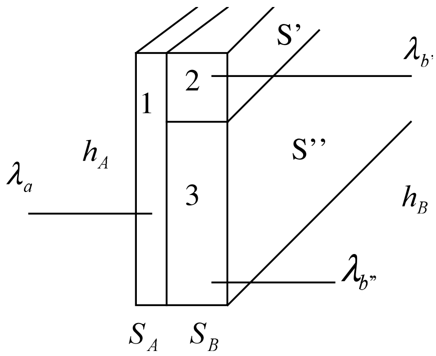

figura 3

Dove:

- 1 = acciaio al quale corrisponde una conducibilità elevata di valore $\lambda_a = 60 W/mK$
- 2 = cemento al quale corrisponde una conducibilità di valore $\lambda_{b'} = 1 W/mK$
- 3 = isolante al quale corrisponde una conducibilità di valore $\lambda_{b''} 00.1 W/mK$
- $T_A = 100°C$
- $T_B = 0°C$
- La superficie $S' = 1m^2$
- La superficie $S'' = 2m^2$
- La superficie totale $S_{TOT} = 3m^2$
- $h_A = 200 \frac{W}{m^2 K}$
- $h_B = 10 \frac{W}{m^2 K}$ (tipico valore di convezione interna)
- $R_T = \frac{\Delta T}{Q} = \frac{1}{hS}$

Esiste una resistenza termica di tipo convettivo che si esprime col seguente coefficiente di convezione: $\dot{Q} = h \cdot S \cdot \Delta T$ in cui 'h' è riferito solo al fenomeno convettivo.

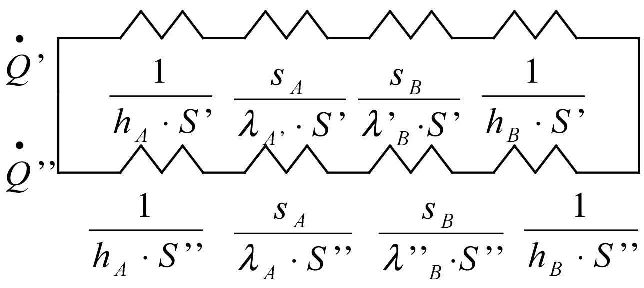

figura 4

Questa soluzione esclude la possibilità di conduzione.
Calcolo ora le resistenze:

$$R' = \frac{1}{200 \cdot 1} + \frac{0.05}{60 \cdot 1} + \frac{0.10}{1 \cdot 1} + \frac{1}{10 \cdot 1} \cong 0.2058 \frac{K}{W}$$

$$R'' = \frac{1}{200 \cdot 2} + \frac{0.05}{60 \cdot 2} + \frac{0.10}{0.1 \cdot 2} + \frac{1}{10 \cdot 2} \cong 0.5529 \frac{K}{W}$$

Adesso vado a calcolare i flussi:

$$\dot{Q}' = \frac{\Delta T}{R'} = \frac{100}{0.2058} = 486W$$

$$\dot{Q}'' = \frac{\Delta T}{R''} = \frac{100}{0.5529} = 181W$$

$$\dot{Q}_{TOT} = 667W$$

Ragioniamo ora in modo differente:

$$R_{TOT} = \frac{1}{\frac{1}{0.2058}} + \frac{1}{\frac{1}{0.5529}} = 0.15 \frac{K}{W}$$

$$\dot{Q} = \frac{100}{0.15} = 667W$$

La lastra d' acciaio unisce i materiali abbiamo qui di seguito lo stesso caso:

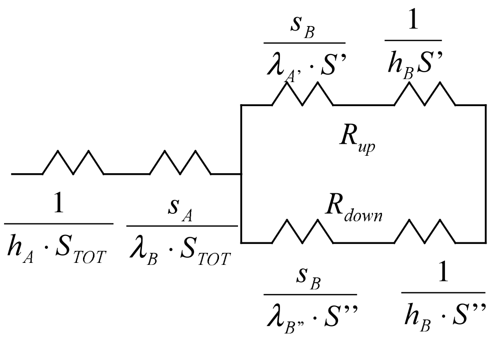

figura 5

$$R_{up} = \frac{0.1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{10 \cdot 1} = 0.2 \frac{K}{W}$$

$$R_{down} = \frac{0.1}{0.1 \cdot 2} + \frac{1}{10 \cdot 2} = 0.55 \frac{K}{W}$$

Le due resistenze R_{up} e R_{down} sono in parallelo, quindi posso fare una resistenza unica parallela alle precedenti che chiamerò R_B:

$$\frac{1}{h_a \cdot S_{TOT}} + \frac{s_A}{\lambda_A S_{TOT}} + R_B$$

figura 6

$$R_B = \frac{1}{\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.55}} = 0.147 \frac{K}{W}$$

$$R_{TOT} = \frac{1}{200 \cdot 3} + \frac{0.05}{60 \cdot 3} + 0.147 = 0.1486 \frac{K}{W}$$

$$\dot{Q} = \frac{100}{0.1486} = 673W$$

Da questo ultimo risultato ottenuto nel secondo modo osservo che, dal momento in cui passa più calore in questa soluzione rispetto alla precedente, il valore ottenuto è il più realistico.

Prendiamo ora in considerazione il caso in cui la trasmissione stazionaria in una lastra piana indefinita omogenea e isotropa di spessore s (vedi fig. 7); le facce siano isotermiche e a temperature t' e t'', dove $t' > t''$.

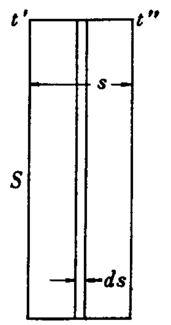

figura 7

Per simmetria le isotermiche sono piani paralleli alle facce. Sia Q la quantità di calore trasmessa nell' unità di tempo attraverso una porzione di superficie isotermica di area S.

Per la legge di Fourier la Q è uguale a:

$$Q = -\lambda S \frac{dt}{ds}$$

dove ds è la distanza fra due isoterme di temperatura $t + dt$, e t. Si ha quindi:

$$-dt = \frac{Q}{\lambda S} ds \tag{1}$$

La grandezza S è una costante così come Q, essendo la trasmissione stazionaria. Il coefficiente di conduttività λ varia invece con la temperatura; ma il più delle volte tale variazione può essere trascurata. Considerando λ come costante, si ha, integrando la (1):

$$t' - t'' = \frac{Q}{\lambda S} s \tag{2}$$

Cioè la resistenza termica interna $R_i = \dfrac{t'-t''}{Q}$ è espressa in questo caso dalla:

$$R_i = \frac{s}{\lambda S} \tag{3}$$

Il coefficiente di conducibilità λ viene determinato per via sperimentale. Tra i possibili metodi ve ne è uno estremamente semplice che si collega a quanto detto a proposito della lastra piana e serve per ottenere il λ di un materiale solido, omogeneo ed isotropo.

Due lastre piane di spessore s del materiale in esame sono a contatto ciascuna con una faccia con una piastra metallica attraversata da una resistenza elettrica e quindi riscaldata (e mantenuta a temperatura costante t) per effetto joule.

Ciascuna delle due facce ancora libere dalle due lastre in prova vengono poste a loro volta a contatto con piastre aventi la stessa temperatura t.

La figura seguente indica schematicamente l' apparato di prova.

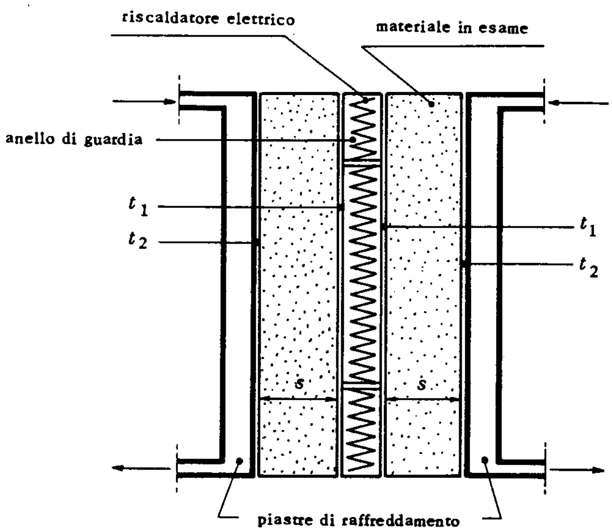

figura 8

Misurando la quantità di energia $Q = C \cdot i^2 R$ dissipata per effetto Joule si ha subito per la simmetria del sistema, che per ogni lastra in prova passa la quantità di calore $\dfrac{Q}{2} = Q^*$.

Pertanto dalla (3) si ha subito:

$$Q^* = \frac{\lambda}{s} S(t_1 - t_2)$$

(3')

Se si misurano i salti di temperatura esistenti fra la lastra centrale e quelle laterali, essendo pure note, oltre allo spessore, le superfici delle lastre in prova, si ottiene con la (3') il valore di λ. Utilizzando lo stesso apparato è possibile determinare la legge di variazione di λ in funzione della temperatura, variando in modo opportuno le temperature delle lastre da mantenere a temperatura costante. Normalmente le lastre esterne vengono mantenute a temperatura costante mediante circolazioni di fluido opportunamente termostatato.

Si abbia ora una lastra piana indefinita costituita di due strati di spessore uniforme di materiale diverso con conduttività λ_1, λ_2 e spessore s_1, s_2 e con facce isotermiche a temperature *t'* e *t''* (fig. 9).

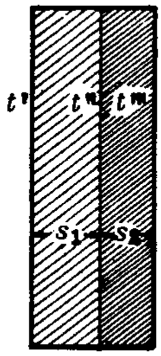

figura 9

La loro superficie di separazione sarà anch'essa isotermica a temperatura *t''*. Considerando una porzione di area *S* della lastra, si ha che i due strati che la compongono sono disposti in serie, e poiché le loro resistenze termiche sono espresse dalle $\frac{s_1}{\lambda_1 S} e \frac{s_2}{\lambda_2 S}$, la resistenza termica complessiva *R*, vale:

$$R_t = \frac{1}{S}\left(\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2}\right)$$

In generale per *n* strati di materiale diverso in serie si ha per R_t l' espressione $\frac{1}{S}\sum \frac{s_i}{\lambda_i}$.

Tubi:

Si abbia ora un solido omogeneo limitato da due superfici isotermiche cilindriche coassiali e indefinite di raggi *r'* ed *r''* (come in fig. 10).

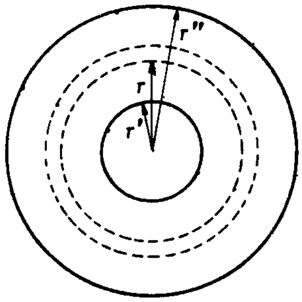

figura 10

Un esempio di questo caso si ha nella trasmissione di calore attraverso la parete dei tubi a sezione circolare.

Per simmetria le superfici isotermiche sono cilindri coassiali; quindi indicando con *r* la distanza di un punto del solido dall' asse del cilindro si ha: *t=t(r).* Considerato un tratto di lunghezza *l*, la quantità di calore *Q* che passa per unità di tempo attraverso una generica superficie isoterma di raggio *r* e di lunghezza *l* è data da: $\delta Q = -d\pi \int_s \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dS$, essendo $\frac{\partial t}{\partial n} = \frac{dt}{dr}$ costante in tutti i punti della superficie e cioè:

$$Q = -\lambda 2\pi r l \frac{dt}{dr} \tag{4}$$

quindi il modulo del gradiente della temperatura è inversamente proporzionale a *r*. Dalla (4) si ha:

$$-dt = \frac{Q}{\lambda 2\pi l} \frac{dr}{r} \tag{5}$$

Integrando questa equazione fra i limiti *r'* e *r''*, ed indicando con *t'* e *t''* le relative temperature si ha, supposto λ costante:

$$t' - t'' = \frac{Q}{\lambda 2\pi l} \log \frac{r''}{r'} \tag{6}$$

e quindi:

$$R_i = \frac{t'' - t''}{Q} = \frac{1}{\lambda 2\pi l} \log \frac{r''}{r'} \tag{7}$$

Se *r''-r'=s* è piccolo rispetto a *r'* allora si ha: $\log \frac{r''}{r'} \cong \frac{s}{r_m}$, essendo $r_m = \frac{r' + r''}{2}$ e si trova per R_i l' espressione del caso dello strato piano.

Nel caso di due strati cilindrici coassiali con coefficienti di conduttività diversi λ_1 e λ_2, disposti in serie (fig. 11).

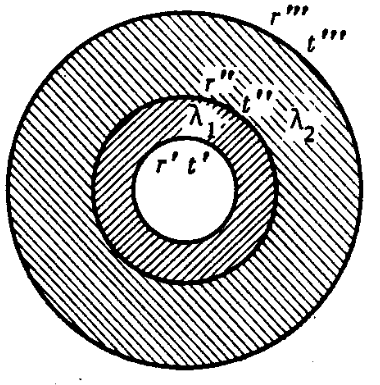

figura 11

si ha che la resistenza di ciascuno di essi è espressa da una relazione analoga alla (7) e che la resistenza complessiva è uguale alla somma delle resistenze. Nel caso di due strati (tubo isolato) si ha quindi, con i simboli indicati nella fig. 11:

$$R_i = \frac{1}{2\pi l}\left(\frac{1}{\lambda_1}\log\frac{r''}{r'} + \frac{1}{\lambda_2}\log\frac{r'''}{r''}\right) \qquad (8)$$

Prendiamo infine in considerazione alcuni esempi mostrati di seguito:

Primo caso (fig. 12):

$S_1 = \pi D_1 L$ e $S_2 = \pi D_2 L$

$\dot{q}_1 = \frac{\dot{Q}}{S_1}$ e $\dot{q}_2 = \frac{\dot{Q}}{S_2}$ sono le densità di flusso termico

Se $S << R$ si ha che: $R_T = \frac{s}{\lambda_S} = \frac{s}{\lambda \pi D L}$

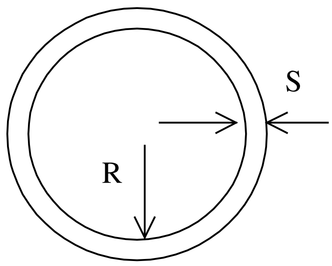

figura 12

Nel secondo caso (fig. 13), ho quattro strati in serie che sommerò tra loro.

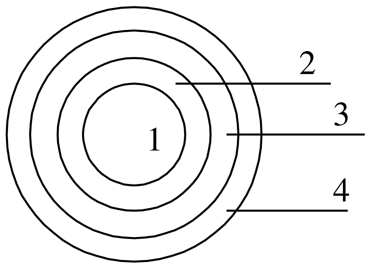

figura 13

Ho perciò quattro resistenze diverse:

$$R_1 = \frac{s}{\lambda \pi D_1 L}$$

$$R_2 = \frac{s}{\lambda \pi D_2 L}$$

$$R_3 = \frac{s}{\lambda \pi D_3 L}$$

$$R_4 = \frac{s}{\lambda \pi D_4 L}$$

in cui $s = \frac{R_2 - R_1}{N}$ e N è il numero di strati presenti nel sistema. Possiamo ora calcolare:

$$R_{TOT} = \frac{s}{\lambda \pi D_1 L} + \frac{s}{\lambda \pi D_2 L} + \frac{s}{\lambda \pi D_3 L} + \ldots + \frac{s}{\lambda \pi D_n L}$$

$$R_{TOT} = \frac{s}{2\lambda \pi R_1 L} + \frac{s}{2\lambda \pi L (R_1 + S)} + \frac{s}{\lambda 2\pi L (R_1 + 2s)} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi \lambda L}$$

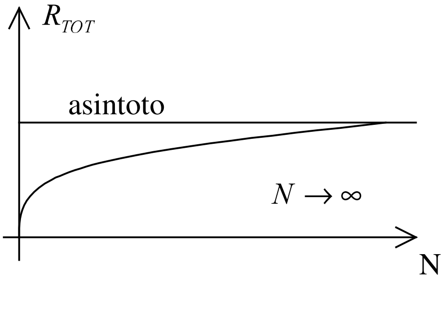

grafico 1

Ogni strato ha una resistenza termica che va via via scemando, la temperatura non varia linearmente e lo scambio termico non è mai tra R_1 e R_2.

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{\Delta T}{R_T} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}} = \frac{T_1 - T(r)}{\frac{\ln \frac{R}{R_1}}{2\pi\lambda L}}$$

$$T(r) = T_1 - \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

Come si nota dal seguente grafico, all' inizio la variazione è rapida ma verso l' esterno il ΔT va scemando, inoltre al crescere della superficie cala la resistenza.

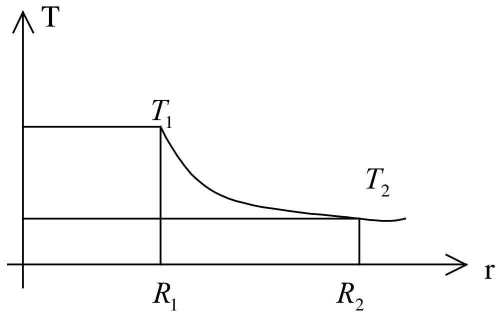

grafico 2

Esempio:

Dato il seguente tubo, lo calcoliamo come se fosse una lastra piana prendendo un diametro medio di 0.15 m.

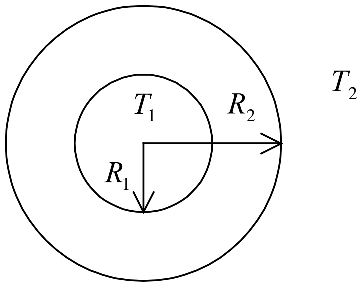

figura 14

- $R_1 = 0.05m$
- $R_2 = 0.10m$
- $\lambda = 1\frac{W}{m^3}$
- $T_1 = 100°C$
- $T_2 = 0°C$
- $L = 5m$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_T} = \frac{100}{\frac{s}{\lambda S}} = \frac{100}{\frac{0.05}{1 \cdot \pi \cdot D \cdot 5m}} = \frac{100 \cdot \pi \cdot 0.15 \cdot 5}{0.05} = 4712W$$

La suddetta espressione non è corretta, dobbiamo diminuire l' errore in base al tipo di tubo che abbiamo; se quest' ultimo è sottile possiamo considerarlo come una lastra piana, ma se è più tozzo l' errore aumenta.

Perciò avremo la seguente:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_T} = \frac{100}{\frac{\ln 10/5}{2\pi\lambda L}} = \frac{100}{\ln 2} \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 5 = 4530W$$

I problemi esaminati di trasmissione per conduttività pura si risolvono in modo semplicissimo, perché esistono condizioni di simmetria tali che permettono di prevedere immediatamente l' andamento delle isotermiche. Per questo motivo si risolve in modo altrettanto semplice il problema della trasmissione stazionaria attraverso un conduttore omogeneo e isotropo limitato da due superfici isotermiche sferiche e concentriche.