ESERCIZI SULLA CONVEZIONE

Esercizio n° 1

Consideriamo un tubo d'acciaio e analizziamo lo scambio termico completo, ossia quello che avviene sia all'interno sia all'esterno del tubo.

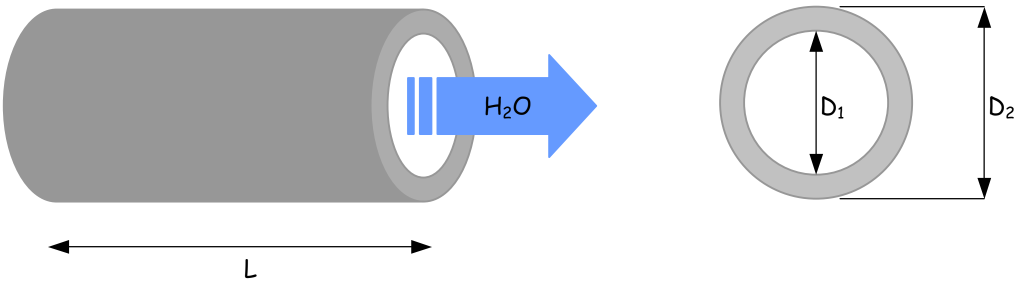


Fig.1

All'interno del tubo scorre dell'acqua con velocità **W = 2,5 m/s** e con una temperatura **T_i = 80°C**.
Fuori dal tubo abbiamo invece dell'aria ferma ad una temperatura **T_e = 20°C**.
Il tubo ha una lunghezza **L = 20 m** e i suoi diametri interno ed esterno sono rispettivamente: **D_1 = 20 mm** e **D_2 = 30 mm**.

Infine ricordiamo che dalle tabelle risulta: $\lambda_{Acciaio} = 60 \frac{W}{mK}$

L' acqua, scorrendo nel tubo, ovviamente più freddo, tende a disperdere una certa quantità di calore **Q**, quindi l'acqua all'imbocco del tubo avrà una certa temperatura (T_i = 80°) che sarà diversa e più precisamente maggiore, dalla temperatura dell'acqua in uscita (T_{out}).

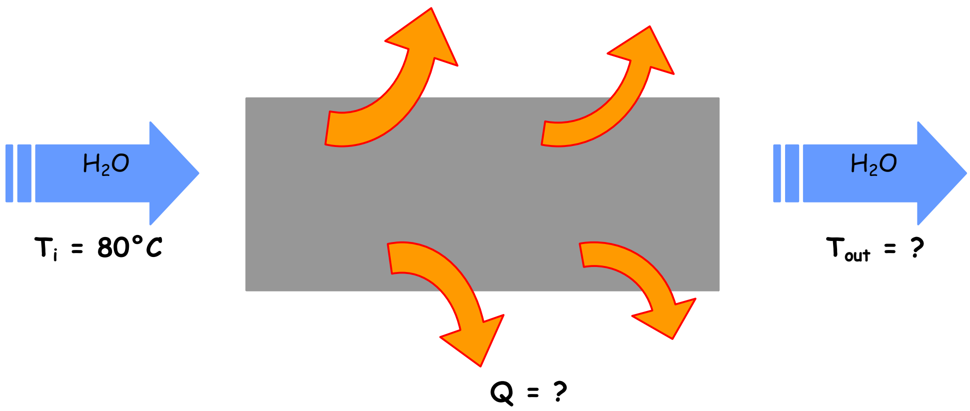


Fig.2

La quantità di calore che viene persa dall'acqua all'interno del tubo e ceduta successivamente all'ambiente esterno può essere calcolata nei due modi seguenti:

1. $\dot{Q} = \dfrac{\Delta T_{ml}}{R_{tot}}$ dove $\Delta T_{ml} = \dfrac{(T_i - T_e) - (T_{out} - T_e)}{\ln \dfrac{T_i - T_e}{T_{out} - T_e}}$

2. $\dot{Q} = \dot{M} \cdot C_p (T_i - T_{out})$ $\rightarrow$ Bilancio dell'energia in un sistema aperto

(1)

Momentaneamente per semplificare le cose, consideriamo $\Delta T_{ml} = \Delta T = (T_i - T_e)$ ipotizzando che l'acqua abbia una temperatura costante $\mathbf{T_i}$ lungo tutto il tubo.
In tal modo andremo a sovrastimare il valore reale di scambio termico ma ai fini della progettazione questo sarà tutt'altro che negativo.

Per la risoluzione del problema dovremo considerare un sistema di tre resistenze collegate in serie (R_1, R_2, R_3) che schematicamente possono essere rappresentate nel modo seguente:

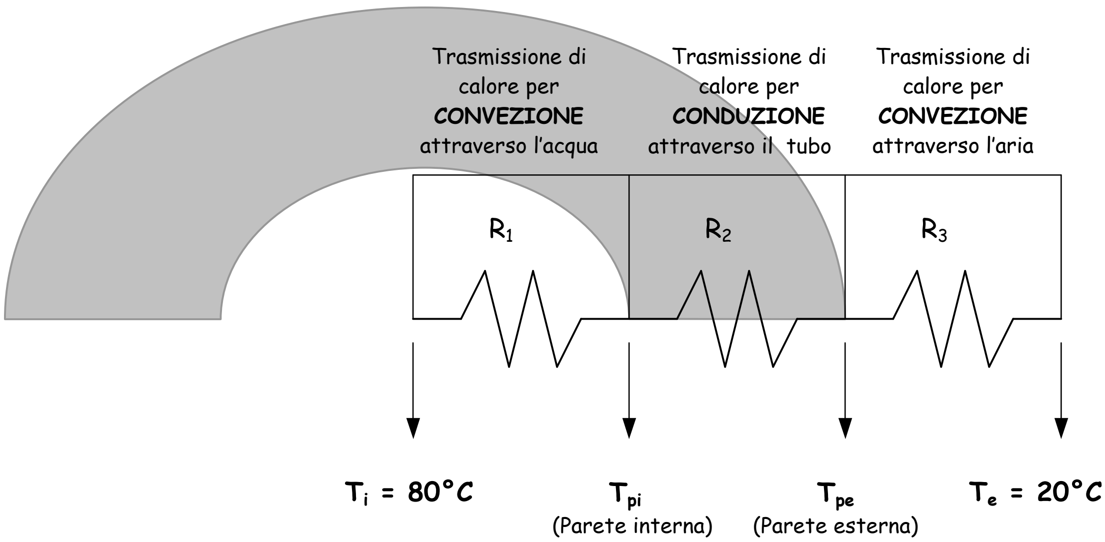


Fig.3 Ingrandimento di una parte della sezione del tubo su cui sono state rappresentate le resistenze che dovranno essere calcolate

$$R_1 = \frac{1}{h_i \cdot \pi \cdot D_1 \cdot L}$$

$$R_2 = \frac{\ln \frac{D_2}{D_1}}{\lambda_{Acciaio} \cdot 2\pi \cdot L}$$

Poiché R$_1$, R$_2$, R$_3$ sono collegate in serie $\mathbf{R_{tot}}$**=** R$_1$+R$_2$+R$_3$

$$R_3 = \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot D_2 \cdot L}$$

(2)

- **Calcoliamo h$_\mathbf{i}$** ossia il **Coefficiente di convezione interno**

Prima di tutto occorre definire il regime di moto del fluido e per farlo occorre calcolare il cosiddetto **n° di Reynolds** (Re):

$$\mathrm{Re} = \frac{W \cdot D_1}{\upsilon_{H_2O}} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}02}{0{,}55 \cdot 10^{-6}} = 90909 \quad \rightarrow \quad >10000 \quad \rightarrow \textit{Regime turbolento}$$

$$\downarrow$$

(3)

quindi possiamo usare la formula di **Dittus-Boelter:**

$$Nu = 0{,}023 \cdot \mathrm{Re}^{0{,}8} \cdot \mathrm{Pr}^{0{,}3}$$

(4)

Il **n° di Prandtl** (Pr) lo si trova nelle tabelle, esso dipende solo dalla scelta del fluido, fatta eccezione per l'acqua dove esso varia anche al variare della temperatura.

Siccome nel nostro caso abbiamo a che fare proprio con l'acqua dobbiamo tenere in considerazione la temperatura **T= 80°C** e se tale temperatura non è stata registrata in tabella si deve fare una media tra i 2 valori immediatamente vicini.

Detto questo consideriamo $\mathrm{Pr} = 3{,}5$

Quindi

$$Nu = 0{,}023 \cdot 90909^{0{,}8} \cdot 3{,}5^{0{,}3} = 310{,}3$$

Ma poiché

$$Nu = \frac{h_i \cdot D_1}{\lambda_{H_2O}} \quad \rightarrow \quad h_i = \frac{Nu \cdot \lambda_{H_2O}}{D_1}$$

(5)

Allora

$$h_i = \frac{310{,}3 \cdot 0{,}64}{0{,}02} = 9931 \frac{W}{m^2 K}$$

• **Calcoliamo h_e** ossia il **Coefficiente di convezione esterno**

Innanzitutto definiamo la temperatura di parete **T_p= 75°C** come valore arbitrario scelto da noi una volta preso atto che la $T_p < T_i$= 80°C

Ora possiamo andare a calcolare il **n° di Grashof** (Gr) e definire così se siamo nel caso di un *regime laminare* o *turbolento*. In questo caso la formula che devo utilizzare per il calcolo del n° di Nusselt è diversa dalla precedente poiché la convezione è *naturale* e non più *forzata*.

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot D_2^3 (T_p - T_e)}{\upsilon_{H_2O}} = \frac{9{,}81 \cdot \frac{1}{300} \cdot 0{,}03^3 \cdot (75-20)}{0{,}55 \cdot 10^{-6}} = 160527273 \tag{6}$$

Dove β è il cosiddetto **Coefficiente di dilatazione termica** e più precisamente rappresenta il rapporto tra la variazione di volume del fluido ottenuta aumentando la temperatura di 1°K, e il volume iniziale.

In verità per definire il regime del fluido occorre fare un passaggio ulteriore e calcolare il cosiddetto **n° di Raleigh** (Ra):

$$Ra = Gr \cdot \Pr \tag{7}$$

Siccome questa volta siamo all'esterno del tubo, il fluido che ci interessa e del quale dobbiamo considerare il Pr non è più l'acqua bensì l'aria.
Nelle tabelle trovo che **Pr_{aria}= 0,71**

Quindi

$$Ra = 160527273 \cdot 0{,}71 = 113974363 \quad \rightarrow \quad << 10^9 \quad \rightarrow \textit{Regime laminare}$$

$$\downarrow$$

In questo caso possiamo usare la formula di **Mc Adams** secondo la quale:

$$Nu = 0{,}53 \cdot Gr^{0,25} \cdot \Pr^{0,25} \tag{8}$$

Perciò avremo che

$$Nu = 0{,}53 \cdot 160527273^{0,25} \cdot 0{,}71^{0,25} = 54{,}76$$

e da qui, come in precedenza, per la (5) possiamo calcolare il coefficiente di convezione **h**:

$$h_e = \frac{Nu \cdot \lambda_{aria}}{D_2} = \frac{54{,}76 \cdot 0{,}03}{0{,}03} = 54{,}76$$

Ora abbiamo a disposizione tutti i dati che ci servono per riuscire a calcolare le tre resistenze R_1, R_2, R_3 secondo la *(2)* e di conseguenza la resistenza totale R_{tot}:

$$R_1 = \frac{1}{9931 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}02 \cdot 20} = 8 \cdot 10^{-5}$$

$$R_2 = \frac{\ln \frac{30}{20}}{60 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20} = 5{,}38 \cdot 10^{-5}$$

$$R_3 = \frac{1}{54{,}76 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}03 \cdot 20} = 9{,}69 \cdot 10^{-3}$$

$$R_{tot} = 8 \cdot 10^{-5} + 5{,}38 \cdot 10^{-5} + 9{,}69 \cdot 10^{-3} = 9{,}827 \cdot 10^{-3} \frac{K}{W}$$

Fatto ciò dalla *(1.1)* ricaviamo che

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{80 - 20}{9{,}827 \cdot 10^{-3}} = 6106W$$

Adesso che abbiamo trovato la quantità di calore **Q** dispersa dall'acqua durante il tragitto all'interno del tubo, possiamo andare a calcolare la T_{out} e verificare così se la nostra approssimazione iniziale fatta per semplificare i calcoli e consentirci di risolvere il problema è accettabile oppure no.
Dalla *(1.2)* si ottiene che:

$$T_{out} = T_i - \frac{\dot{Q}}{\dot{M} \cdot C_p} \tag{8}$$

Dove **M** è il **Coefficiente di portata in massa** e si calcola nel seguente modo:

$$\dot{M} = \rho_{H_2O} \cdot W \cdot A = 1000 \cdot 2{,}5 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}02}{2}\right)^2 = 0{,}785 \frac{Kg}{s} \tag{9}$$

So che il calore specifico dell'acqua $\mathbf{C_p}$ è:

$$C_p = 4187 \frac{J}{KgK}$$

Di conseguenza avrò che

$$T_{out} = 80 - \frac{6106}{0{,}785 \cdot 4187} = 78{,}14°C$$

Ora che possediamo un valore di T_{out}, seppur approssimativo, siamo in grado di calcolare ΔT_{ml} (Precedentemente approssimato a ΔT) secondo la *(1.1)* e quindi, la dispersione termica effettiva **Q**.

$$\Delta T_{ml} = \frac{(80-20)-(78{,}14-20)}{\ln\frac{80-20}{78{,}14-20}} = 59°C$$

perciò

$$\dot{Q} = \frac{59}{9{,}87\cdot 10^{-3}} = 5984W$$

ritornando alla *(8)* avremo che

$$T_{out} = 80 - \frac{5984}{0{,}785\cdot 10^{-3}} = 78{,}18°C$$

Quindi dai calcoli risulta che la reale temperatura di uscita dell'acqua è 78,18°C anziché 78,14°C come risultava dal primo calcolo frutto di un'approssimazione.
E' evidente come, in questo caso, la nostra approssimazione iniziale che considera una T costante di 80°C dell'acqua all'interno del tubo, non ha influito in modo considerevole sul risultato finale.

Esercizio n° 2

Isolamento termico nei tubi

Consideriamo ora un tubo in acciaio nel quale viene fatta scorrere dell'acqua fredda.
Poiché all'esterno la temperatura è più elevata, sulla superficie del tubo si crea della condensa che con il passare del tempo porta alla formazione della ruggine.
Per evitare che questo accada si riveste il tubo con una guaina isolante della quale è necessario definire il diametro.

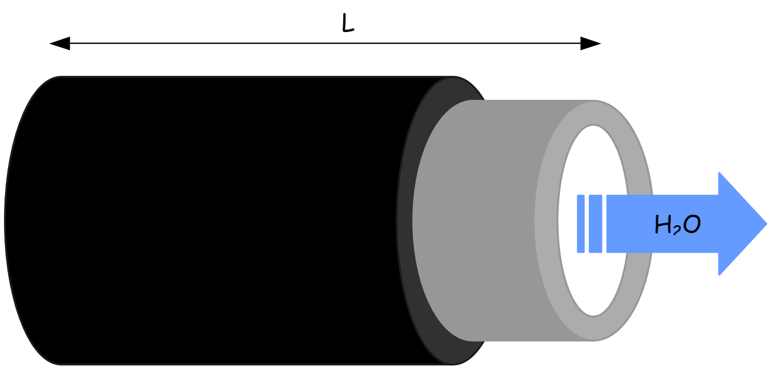


Fig.1

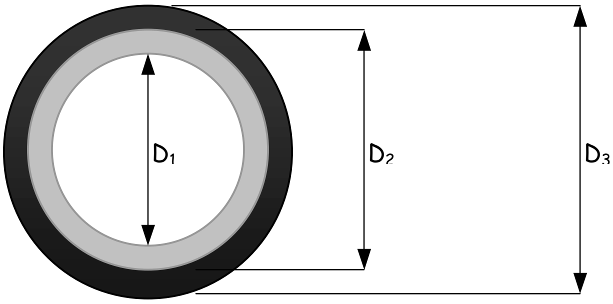


Fig.2

All'interno del tubo scorre dell'acqua con velocità **W= 2 m/s** e con una temperatura **T_i = 4°C**.
Fuori dal tubo abbiamo invece dell'aria ferma ad una temperatura **T_e = 32°C**.
Il tubo ha una lunghezza **L = 1 m** e i suoi diametri interno ed esterno sono rispettivamente: **D_1 = 30 mm** e **D_2 = 35 mm**.
Occorre inoltre tenere presente la conducibilità termica dei diversi materiali:

$$\lambda_{Acciaio} = 60\frac{W}{mK} \quad \text{e} \quad \lambda_{Isolante} = 0{,}05\frac{W}{mK}$$

Un altro dato importante da tenere in considerazione è il cosiddetto **Grado igrometrico** (Umidità):

$$\varphi_e = 0{,}4$$

Esso consente di riuscire a determinare sul **diagramma psicometrico** la **Temperatura di rugiada**, che deve risultare minore della temperatura di parete esterna (T_{pe}) affinché la superficie del tubo non arrugginisca, o per essere più chiari, affinchè il problema venga risolto e sia determinato perciò il diametro dell'isolante.

DIAGRAMMA PSICOMETRICO

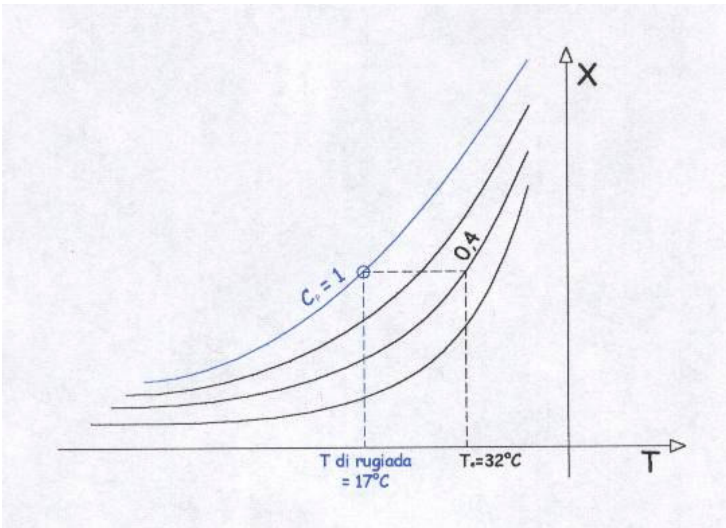


Fig.3

Ora, per evitare la condensa e il conseguente formarsi della ruggine è necessario che:

$$T_{pe} > T_{Rugiada} \quad \rightarrow \quad T_{pe} > 17°C$$

In questo caso le resistenze non sono più tre come nel caso precedente, bensì quattro:

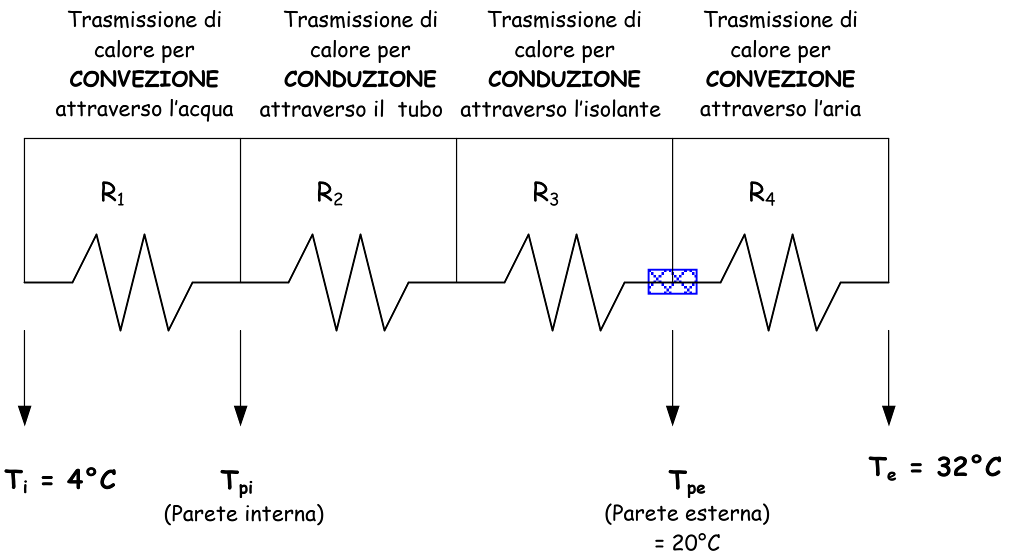


Fig.3

Come abbiamo visto nell' esercizio precedente abbiamo che:

$$R_1 = \frac{1}{h_i \cdot \pi \cdot D_1 \cdot L}$$

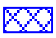
$$R_2 = \frac{\ln \frac{D_2}{D_1}}{\lambda_{Acciaio} \cdot 2\pi \cdot L}$$

Poiché R_1, R_2, R_3, R_4 sono collegate in serie

R_{tot}= $R_1+R_2+R_3+R_4$

$$R_3 = \frac{\ln \frac{D_3}{D_2}}{\lambda_{Isolante} \cdot 2\pi \cdot L}$$

$$R_4 = \frac{1}{h_e \cdot \pi \cdot D_3 \cdot L} \qquad (1)$$

Di queste quattro resistenze, tre sono fisse, mentre una (R_3) è variabile. Dobbiamo far variare R_3 fino a che nel punto  la temperatura abbia superato i 17°C.

Per fare questo non esiste una vera e propria regola, per tentativi bisogna far variare il diametro del tubo di isolante fino a quando non si riesce a raggiungere la T_{pe} desiderata.

Proviamo quindi a considerare **D_3= 40 mm**

- Come nell'esercizio precedente **calcoliamo h_i**

Definiamo il regime di moto del fluido calcolando il **n° di Reynolds** (Re):

$$\mathrm{Re} = \frac{W \cdot D_1}{\upsilon_{H_2O}} = \frac{2 \cdot 0{,}03}{1{,}55 \cdot 10^{-6}} = 38710 \quad \rightarrow \quad >10000 \quad \rightarrow \textit{Regime turbolento}$$

$$\downarrow \qquad (2)$$

quindi possiamo usare la formula di **Dittus-Boelter:**

$$Nu = 0{,}023 \cdot \mathrm{Re}^{0{,}8} \cdot \mathrm{Pr}^{0{,}4} \qquad (3)$$

Vogliamo far notare che in questo caso, l'esponente di Pr è 0,4 e non più 0,3 come nel caso precedente poiché l'acqua nel tubo, più fredda rispetto all'ambiente esterno, tende a riscaldarsi.

La legge di Dittus-Boelter prevede: $\mathrm{Pr}^{0{,}3}$ → se il fluido si raffredda
$\mathrm{Pr}^{0{,}4}$ → se il fluido si riscalda

Nelle tabelle troviamo il **n° di Prandtl** (Pr) per l'acqua alla temperatura **T_i=4°C**

$$\mathrm{Pr} = 11{,}6$$

Quindi

$$Nu = 0{,}023 \cdot 38710^{0{,}8} \cdot 11{,}6^{0{,}4} = 287$$

Ma poiché

$$Nu = \frac{h_i \cdot D_1}{\lambda_{H_2O}} \quad \rightarrow \quad h_i = \frac{Nu \cdot \lambda_{H_2O}}{D_1} \qquad (4)$$

Allora

$$h_i = \frac{287 \cdot 0{,}575}{0{,}03} = 5499 \frac{W}{m^2 K}$$

Come al solito υ_{H_2O} e λ_{H_2O}, dipendenti entrambi dalla temperatura dell'acqua, si trovano nelle tabelle. Qualora la temperatura desiderata non dovesse essere presente occorre fare una media dei due valori vicini a quello desiderato.

• **Calcoliamo h_e**

Calcoliamo il **n° di Grashof** (Gr) per definire il regime del fluido

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot D_3^3 \left(T_e - T_{pe}\right)}{\upsilon_{Aria}^{\ 2}} = \frac{9{,}81 \cdot \frac{1}{300} \cdot 0{,}04^3 \cdot (32-20)}{\left(14 \cdot 10^{-6}\right)^2} = 128131$$

(5)

calcoliamo ora il **n° di Raleigh** (Ra):

$$Ra = Gr \cdot \Pr_{Aria}$$

(6)

Quindi

$$Ra = 128131 \cdot 0{,}71 = 90973 \quad \rightarrow \quad 10^3 < \text{ Ra } < 10^9 \quad \rightarrow \textit{Regime laminare}$$

$$\downarrow$$

In questo caso possiamo usare la formula di **Mc Adams** secondo la quale:

$$Nu = 0{,}53 \cdot Gr^{0,25} \cdot \Pr^{0,25} = 0{,}53 \cdot 128131^{0,25} \cdot 0{,}71^{0,25} = 9{,}20$$

(7)

per la *(4)* calcoliamo il coefficiente di convezione **h**:

$$h_e = \frac{Nu \cdot \lambda_{aria}}{D_3} = \frac{9{,}20 \cdot 0{,}03}{0{,}04} = 6{,}90 \frac{W}{m^2 K}$$

Ora, secondo la *(1)*, possiamo calcolare le quattro resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 e di conseguenza la resistenza totale R_{tot}:

$$R_1 = \frac{1}{5499 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}03} = 1{,}93 \cdot 10^{-3}$$

$$R_2 = \frac{\ln \frac{35}{30}}{60 \cdot 2 \cdot 3{,}14} = 4{,}09 \cdot 10^{-4}$$

$$R_3 = \frac{\ln \frac{40}{35}}{0{,}05 \cdot 2 \cdot 3{,}14} = 0{,}425$$

$$R_4 = \frac{1}{6,9 \cdot 3,14 \cdot 0,04} = 1,154$$

$$R_{tot} = 1,93 \cdot 10^{-3} + 4,09 \cdot 10^{-4} + 0,425 + 1,154 = 1,581 \frac{K}{W}$$

Fatto ciò posso trovare

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{32-4}{1,581} = 17,70 W \tag{8}$$

In questo caso però vogliamo sapere se il diametro scelto per l'isolante è corretto oppure no, ossia se $T_{pe} > 17°C$

Per fare questo isolo la quarta resistenza e applico solo ad essa la **legge di Ohm**:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_4} = \frac{32 - T_{pe}}{1,154} \quad \rightarrow \quad T_{pe} = 32 - \dot{Q} \cdot R_4 \tag{9}$$

$$T_{pe} = 32 - 17,70 \cdot 1,154 = 11,57°C$$

$$\downarrow$$

T_{pe}< 17°C

$$\downarrow$$

Questo significa che il diametro dell'isolante D_3 scelto non è sufficiente per impedire la condensa e la successiva formazione della ruggine.

Rivediamo quindi i calcoli ipotizzando di usare un isolante di spessore **D_3= 50 mm.**

Nel calcolo di **h_i** il diametro **D_3** non compare quindi $h_i = 5499 \frac{W}{m^2 K}$

Ma il calcolo di **h_e** subisce alcune variazioni:

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot D_3^3 (T_e - T_{pe})}{\upsilon_{Aria}{}^2} = \frac{9,81 \cdot \frac{1}{300} \cdot 0,05^3 \cdot (32-20)}{(14 \cdot 10^{-6})^2} = 250255$$

$$Nu = 0,53 \cdot Gr^{0,25} \cdot \Pr^{0,25} = 0,53 \cdot 250255^{0,25} \cdot 0,71^{0,25} = 10,88$$

ed infine

$$h_e = \frac{Nu \cdot \lambda_{aria}}{D_3} = \frac{10,88 \cdot 0,03}{0,05} = 6,528 \frac{W}{m^2 K}$$

Adesso, sempre secondo la *(1)*, possiamo calcolare R_{tot}:

$$R_{tot} = 1{,}93 \cdot 10^{-3} + 4{,}09 \cdot 10^{-4} + \underbrace{\frac{\ln \frac{40}{50}}{0{,}05 \cdot 2 \cdot 3{,}14}}_{1{,}135} + \underbrace{\frac{1}{6{,}528 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05}}_{0{,}976} = 2{,}113 \frac{K}{W}$$

da qui per la *(8)*

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{32-4}{2{,}113} = 13{,}25W$$

e per la *(9)*

$$T_{pe} = 32 - \dot{Q} \cdot R_4 = 32 - 13{,}25 \cdot 0{,}976 = 19°C$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{T_{pe} > 17°C}$$

Quindi il problema è stato risolto, il diametro scelto per l'isolante pari a 50 mm è sufficiente per evitare la condensa all'interno del tubo poiché la temperatura di parete esterna risulta maggiore della temperatura di rugiada (17°C).