

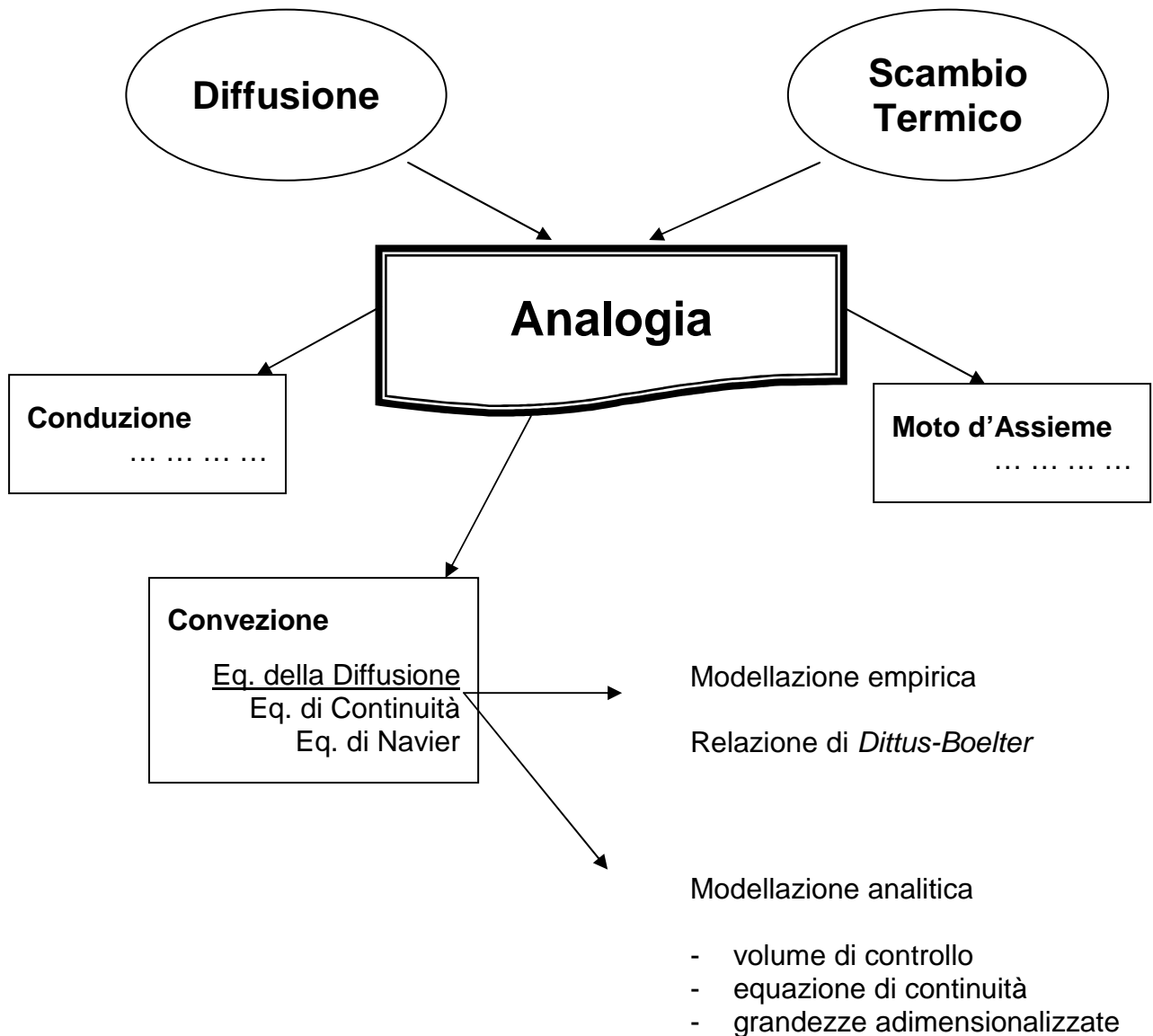
# Convezione in campo diffusivo

## INDICE DELLA LEZIONE DEL 16/03/2010

### – ARGOMENTO: CONVEZIONE IN CAMPO DIFFUSIVO

Analogia Scambio Termico e Diffusione .....	1
Convezione: Eq. della Diffusione .....	2
Modellazione empirica .....	2
Relazione di Dittus-Boelter .....	3
Modellazione analitica .....	4
Grandezze adimensionalizzate .....	8

## Concept Map



## Analogia Scambio Termico e Diffusione

Fra i fenomeni di scambio termico e quello della diffusione vi è una stretta analogia, la quale ci permette di utilizzare le relazioni di un fenomeno per studiare l'altro. In particolare è possibile riscrivere le leggi e le equazioni che governano lo scambio termico per interpretare i fenomeni diffusivi.

Nella tabella seguente è riportata la suddetta analogia, mostrando, per tre casi (Conduzione, Convezione e Moto d'Assieme), le relative leggi ed equazioni.

<b>Scambio Termico</b>	<b>Diffusione</b>
<i>Conduzione</i>	
Legge di Fourier	Legge di Fick
<i>Moto d'Assieme</i>	
---	Legge di Fick generalizzata
<i>Convezione</i>	
Eq. di Fourier ( $T, \tau, x$ ) Eq. di Continuità Eq. di Navier	Eq. della Diffusione ( $C_A, \tau, x$ ) Eq. di Continuità Eq. di Navier

### Note sullo Scambio Termico:

Da una prima analisi risulta che non esiste un analogo del moto d'assieme in campo termico, per il quale erano stati studiati esclusivamente convezione e conduzione.

Per quanto riguarda la Convezione, l'eq. di Fourier, equazione differenziale di temperatura, tempo e spazio ( $T, \tau, x$ ), mi permette di risolvere problemi non stazionari; essa è, inoltre, una equazione vettoriale come l'eq. di Navier. L'eq. di Continuità, a differenza delle altre due, è scalare, in quanto funzione della massa, notoriamente una grandezza scalare.

### Note sulla Diffusione:

In campo convettivo, l'eq. della diffusione è la gemella di quella di Fourier in campo termico; ciò che cambia fra le due sono le variabili: in campo diffusivo non c'è la dipendenza dalla temperatura, variabile rimpiazzata dalla concentrazione della sostanza A ( $C_A, \tau, x$ ). Per quanto concerne l'eq. di Navier e quella di continuità, le considerazioni restano le stesse delle analoghe in campo termico.

## Convezione: Eq. della Diffusione

Passiamo ora allo studio dei fenomeni convettivi in campo diffusivo

<i>Convezione</i>	
	Eq. della Diffusione ( $C_A, \tau, x$ ) Eq. di Continuità Eq. di Navier

### **Modellazione empirica**

Ingegnieristicamente, quando vengono elaborate equazioni e leggi si cerca di compattarle secondo la regola del 'single number', ovvero si cerca di creare una relazione fra due grandezze per mezzo di un coefficiente; nel caso dello scambio termico, per elaborare l'eq. di Fourier il 'single number' utilizzato è il coefficiente di convezione  $h$ , dal quale deriva poi la formulazione seguente:

$$\vec{q} = \bar{h}(T_p - T_\infty) \text{ con } [h] = \left[ \frac{W}{m^2K} \right]$$

dove  $\bar{h}$  indica il valore medio integrato sull'intera superficie

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h \, dS$$

In realtà, in questo caso  $h$  non è un coefficiente non essendo adimensionale; inoltre non è nemmeno una vera e propria costante tale da rendere Fourier una legge o per lo meno una equazione valida sempre.

Per analogia, come detto sopra, nel campo diffusivo, possiamo esprimere l'eq. della Diffusione con la seguente espressione:

$$\vec{n}_A = \bar{h}_m(\rho_{A_p} - \rho_{A_\infty})$$

dove  $h_m$  è chiamato coefficiente di trasporto di materia diffusivo,  $\rho_{A_p}$  è la densità della specie A alla parete, mentre  $\rho_{A_\infty}$  è la densità della specie A lontano dalla parete.

I valori di  $h$ , e quindi  $h_m$ , vengono calcolati da formule empiriche ricavate da 'curve fitting' di dati sperimentali.

### Relazione di Dittus-Boelter

In particolare  $h$  è ricavato dalla relazione empirica di Dittus-Boelter, utilizzata in regime turbolento ( $Re > 4000$ ), la cui formulazione è la seguente:

$$h = \frac{\lambda}{D} \cdot 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4}$$

dove  $Re$  è il numero di Reynolds e vale

$$Re = \frac{WD}{\nu}$$

$Pr$  è il numero di Prandtl e vale

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha^2}$$

e  $\alpha^2$  è la diffusività termica definita come

$$\alpha^2 = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

con  $W$  la velocità del fluido,  $D$  il diametro (o la grandezza caratteristica),  $\nu$  la viscosità cinematica [ $Pa \cdot s$ ],  $\lambda$  conducibilità termica del fluido [ $\frac{J/s}{m K}$ ],  $\rho$  densità [ $\frac{kg}{m^3}$ ] e  $c_p$  il calore specifico a pressione costante. La diffusività termica dimensionalmente è [ $\frac{m^2}{s}$ ].

Questa relazione mi fornisce il valore di  $h$ , il quale servirà per trovare il valore del numero di Nusselt, definito come

$$Nu = \frac{hD}{\lambda}$$

Come noto, i numeri sopra definiti sono adimensionali.

In quanto empirica, la relazione di Dittus-Boelter non è molto precisa, e generalmente mi comporta un errore nella valutazione del valore di  $h$  di circa il 30 %. Tuttavia, in campo termico, un errore di tale entità è più che accettabile.

La necessità di elaborare relazioni basandosi sul numero di Nusselt  $Nu$  deriva dal fatto che l'analogia termico-diffusiva parte proprio dalla definizione di questo numero. Infatti

$$Sh = \frac{h_m D}{D_{AB}}$$

chiamato, numero di Sherwood, è, evidentemente, l'analogo in campo diffusivo del numero di Nusselt.

Riprendendo sempre l'analogia, ne deriva che il numero di Sherwood sia definito così

$$Sh = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{0,4}$$

dove  $Sc$  è il numero di Schmidt (analogo del numero di Prandtl) definito come

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$$

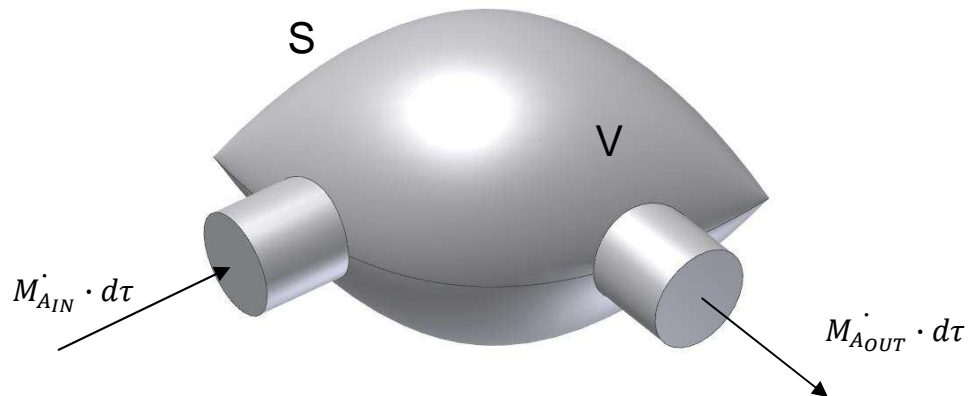
con  $D_{AB}$  è la diffusività binaria della sostanza A nella sostanza B (analogo della diffusività  $\alpha^2$ ). Schmidt può anche essere visto come la diffusività adimensionalizzata.

Ricapitolando,  $Nu$  è ottenuto dall'equazione di Fourier e  $Sh$  da quella della Diffusività, mentre  $Re$  è, in entrambi i casi, ricavato da Navier.

### **Modellazione analitica**

Quanto detto finora è stato ricavato sfruttando l'analogia fra i fenomeni studiati in campo termico ed in campo diffusivo. Vediamo ora di trovarne una giustificazione analitica.

Prendiamo un volume di controllo  $V$  e definiamo una superficie  $S$  che lo delimiti.



Definiamo allora la portata in massa come  $\dot{M}$ , considerato un intervallo di tempo  $d\tau$ , otteniamo

$$d\dot{M}_A = (\dot{M}_{A_{in}} - \dot{M}_{A_{out}})d\tau$$

la quale mi rappresenta l'accumulo in massa della specie A all'interno del volume  $V$  nell'intervallo di tempo  $d\tau$ .

Definiamo, quindi, la portata in massa di *stored*, ovvero di accumulo, come

$$\dot{M}_{A_{st}} = \dot{M}_{A_{in}} - \dot{M}_{A_{out}}$$

Questa è l'eq. di continuità della specie chimica A nel campo diffusivo.

Tuttavia, se supponiamo di essere in regime stazionario, vale la seguente

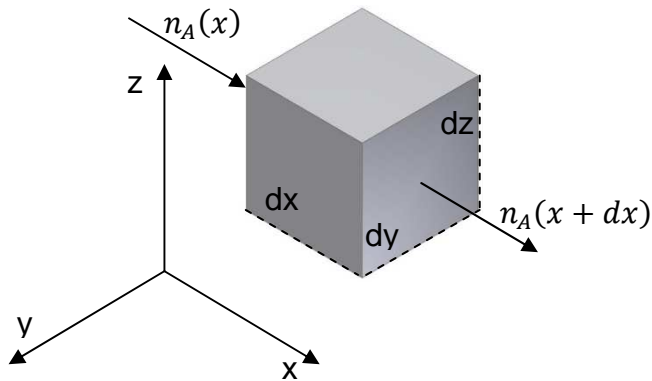
$$\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$$

ciò sta a significare che, se la derivata di una grandezza fatta rispetto al tempo è nulla, essa si mantiene costante nel tempo. Da ciò deriva che  $\dot{M}_{A_{st}}$  è pari a zero, ovvero

$$\dot{M}_{A_{in}} - \dot{M}_{A_{out}} = 0$$

È ovviamente una condizione altamente preferibile, tuttavia in molti casi nella realtà si devono affrontare sistemi instabili, ovvero non in regime stazionario, in cui è possibile individuare un andamento oscillatorio delle grandezze. Questa condizione si verifica per determinati valori di portata.

Considero un volume cubico in un sistema di riferimento 3D.



Il volume  $V$  è definito da tre spigoli  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , e viene definito una portata in massa diffusiva della specie  $A$  chiamata  $n_A$ , governata dalla legge di Fick e riferita alla generica ascissa  $x$ . All'interno del volume posso, pertanto, avere accumuli della specie chimica  $A$ . Utilizzando la nota relazione

$$dM_A = \rho_A dV$$

definiamo il flusso entrante all'ascissa  $x$

$$A \cdot n_A(x) = -\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} dy dz$$

e quello uscente all'ascissa  $x+dx$

$$A \cdot n_A(x + dx) = -\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x + dx)}{\rho} \right)}{\partial x} dy dz$$

Nelle relazioni sopra riportate, sono stati trascurati i termini dovuti al trasporto,

$$\dots + \rho \cdot v$$

pertanto le due equazioni sopra citate per un fluido in movimento diventano

$$A \cdot n_A(x) = \left[ -\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} + \rho_A v_x \right] dy dz$$

a  $x$

$$A \cdot n_A(x + dx) = \left[ -\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x + dx)}{\rho} \right)}{\partial x} + \rho_A v_{x+dx} \right] dy dz$$

a  $x + dx$

Da Analisi ricordiamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$$

allora la seconda equazione diventa

$$\begin{aligned} A \cdot n_A(x + dx) &= -\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} dy dz + \rho_A v_x dy dz \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} - \rho_A v_x \right] dx dy dz \end{aligned}$$

da cui è possibile ricavare la portata in massa di accumulo della specie A nella direzione x

$$\Delta \dot{M}_{Ax} = A \cdot n_A(x) - A \cdot n_A(x + dx)$$

sostituendo le espressioni di  $A \cdot n_A(x)$  e  $A \cdot n_A(x + dx)$  trovati otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta \dot{M}_{Ax} &= \cancel{-\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} dy dz} + \cancel{\rho_A v_x dy dz} + \cancel{\rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} dy dz} \\ &\quad - \cancel{\rho_A v_x dy dz} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} - \rho_A v_x \right] dx dy dz \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\Delta \dot{M}_{Ax} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D_{AB} \frac{\partial \left( \frac{\rho_A(x)}{\rho} \right)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_A v_x) \right] dx dy dz$$

Ponendo ora  $dx dy dz = dV$  e ipotizzando di essere in condizioni tali da poter considerare  $\rho$  e  $D_{AB}$  costanti nella direzione  $x$ , possiamo portare fuori dal differenziale le costanti ottenendo

$$\Delta \dot{M}_{Ax} = \left[ D_{AB} \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial x^2} - \frac{\partial(\rho_A v_x)}{\partial x} \right] dV$$

Quello che abbiamo trovato, rappresenta la variazione di massa della specie A nella direzione  $x$ .

Analogamente posso trovare le equazioni relative a  $\Delta \dot{M}_{Ay}$  e  $\Delta \dot{M}_{Az}$ .

$$\Delta \dot{M}_{Ay} = \left[ D_{AB} \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial y^2} - \frac{\partial(\rho_A v_y)}{\partial y} \right] dV$$

$$\Delta \dot{M}_{Az} = \left[ D_{AB} \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial z^2} - \frac{\partial(\rho_A v_z)}{\partial z} \right] dV$$

A questo punto è possibile ricavare il valore di  $\Delta \dot{M}_A$  totale

$$\Delta \dot{M}_A = \left[ - \left( \frac{\partial(\rho_A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_A v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_A v_z)}{\partial z} \right) + D_{AB} \left( \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial z^2} \right) \right] dV$$

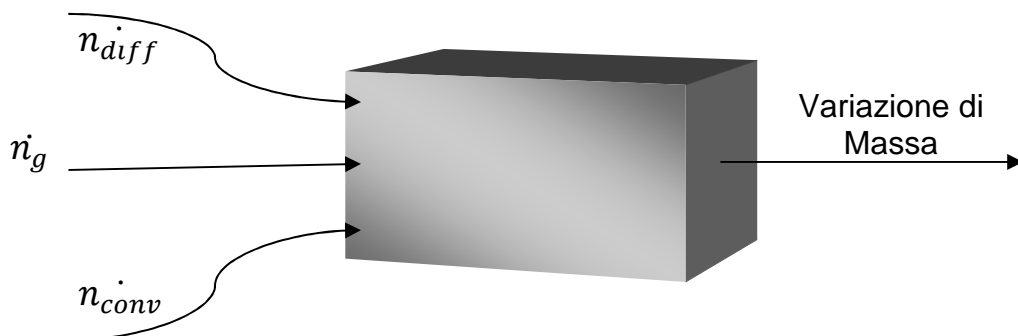
Il secondo termine dell'equazione rappresenta il Laplaciano quadro di  $\rho_A$ , indicato con il simbolo  $\nabla^2 \rho_A$ . Infatti

$$\nabla^2 \rho_A = \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\rho_A)}{\partial z^2}$$

attraverso cui è possibile riscrivere la precedente equazione come

$$\Delta \dot{M}_A = \left[ - \left( \frac{\partial(\rho_A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_A v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho_A v_z)}{\partial z} \right) + D_{AB} \nabla^2 \rho_A \right] dV$$

A questo punto prendiamo in esame un sistema in cui avvengono scambi di massa





dove  $\dot{n}_g \cdot dV$  è la portata generativa e conseguentemente  $\dot{n}_g$  è definito termine generativo complessivo e ha come unità di misura  $\left[\frac{kg}{s \cdot m^3}\right]$ ,  $\dot{n}_{diff}$  è il termine dovuto alla portata diffusiva, mentre  $\dot{n}_{conv}$  è quello relativo alla portata convettiva .

Analizzando il contributo delle varie portate posso valutare la variazione di massa nel sistema.

In particolare essa è pari a

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial \tau} dV = \left[ \dot{n}_{Ag} - \left( \frac{\partial(\rho_A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_A v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_A v_z)}{\partial z} \right) + D_{AB} \nabla^2 \rho_A \right] dV$$

Poiché la velocità varia meno della densità, per  $dx$  piccoli possiamo considerarla costante (approssimazione di Boussinesq).

Per questo motivo trascuriamo gli infinitesimi di ordine secondario ed otteniamo quindi l'equazione della diffusione nella seguente forma:

$$\frac{D\rho_A}{D\tau} = \dot{n}_{Ag} + D_{AB} \nabla^2 \rho_A$$

dove  $\frac{D\rho_A}{D\tau}$  è la derivata sostanziale di  $\rho_A$  fatta rispetto al tempo  $\tau$  che esprimiamo come:

$$\frac{D\rho_A}{D\tau} = \frac{\partial \rho_A}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho_A}{\partial z}$$

Si può notare nuovamente come per l'analogia tra scambio diffusivo e scambio termico l'equazione della diffusione sia formalmente identica all'equazione di Fourier:

$$\frac{DT}{D\tau} = q_G + \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c_p}}_{\alpha^2} \nabla^2 T = q_G + \alpha^2 \nabla^2 T$$

dove  $\alpha^2$  è la diffusività termica.

### *Grandezze adimensionalizzate*

Per utilizzare meglio le analogie fra le diverse equazioni che governano differenti fenomeni è utile scriverle in forma adimensionalizzata così da permettere un passaggio più agevole da un fenomeno all'altro, evitando il problema dimensionale. Inoltre con questa operazione andiamo a ridurre le variabili del problema perché raggruppate.

Prima di procedere scriviamo l'equazione della diffusione in forma molare:

$$\frac{DC_A}{D\tau} = D_{AB} \nabla^2 C_A + \dot{N}_{AG} \left[ \frac{kmol}{m^3 s} \right]$$

dove il termine generativo  $\dot{N}_{GA}$  può essere trascurato.

Le variabili che dobbiamo adimensionalizzare sono spazio, tempo e concentrazione.

Definiamo:

- spazio adimensionale:

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$z^* = \frac{z}{L}$$

dove L è la lunghezza caratteristica, la cui scelta è importante ed influenza i risultati. La scelta della lunghezza caratteristica è empirica, non è detto a priori quale sia, ma varia da situazione a situazione. Dal punto di vista teorico tale scelta è del tutto irrilevante, mentre dal punto di vista pratico è figlia del *fitting* dei dati. La scelta di diversi valori di L permette di fittare meglio i risultati.

Le altre grandezze da adimensionalizzare sono le seguenti:

- velocità adimensionale:

$$v^* = \frac{v}{v_\infty}$$

definita così da avere velocità adimensionale unitaria all'infinito e nulla alla parete;

- concentrazione adimensionale:

$$C_A^* = \frac{C_A - C_{AP}}{C_{A\infty} - C_{AP}}$$

definita così da avere concentrazione adimensionale unitaria all'infinito e nulla alla parete;

- tempo adimensionale:

$$\tau^* = \tau \frac{v_\infty}{L}$$

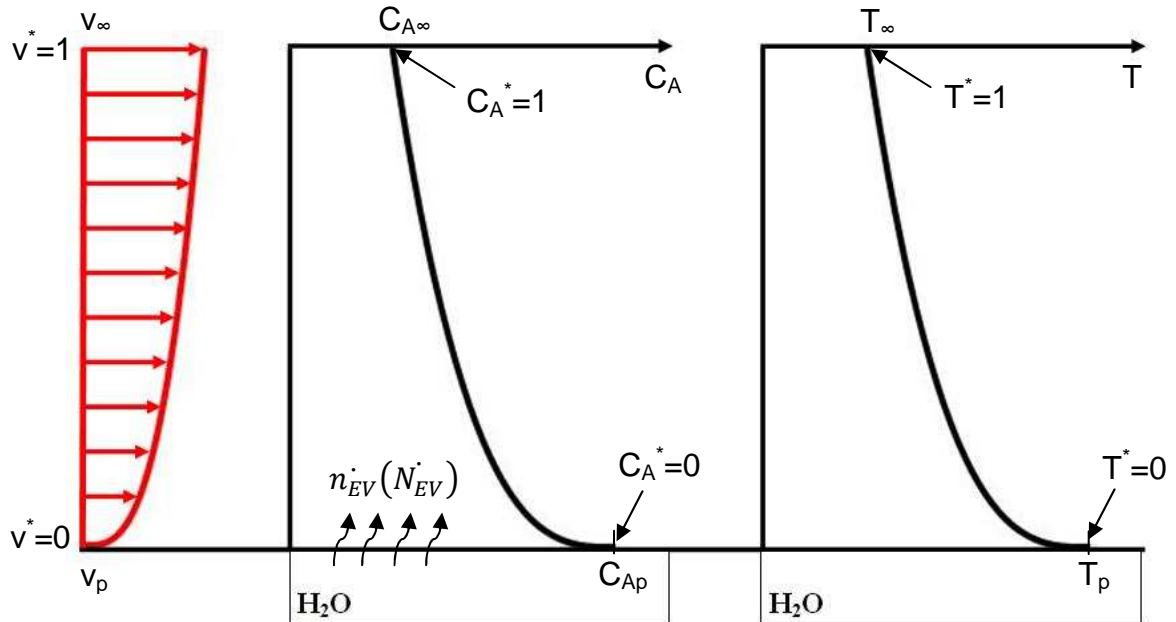
(nel moto di un fluido in un condotto si considera la velocità media,  $v_\infty = w$ )

- temperature adimensionale:

$$T^* = \frac{T - T_P}{T_\infty - T_P}$$

definita così da avere temperatura adimensionale unitaria all'infinito e nulla alla parete;

Nel grafico seguente sono riportati gli andamenti della velocità, della concentrazione e della temperatura.



A questo punto andando a sostituire è possibile ricavare l'equazione della diffusione adimensionale:

$$\frac{DC_A^* (C_{A\infty} - C_{AP})}{D\tau^* \frac{L}{v_\infty}} = D_{AB} \nabla^{*2} C_A^* \frac{(C_{A\infty} - C_{AP})}{L^2}$$

Semplificando e moltiplicando a secondo membro numeratore e denominatore per  $v$  si ottiene:

$$\frac{DC_A^*}{D\tau^*} = \frac{v D_{AB}}{v_\infty L} \nabla^{*2} C_A^*$$

$$\frac{DC_A^*}{D\tau^*} = \frac{1}{Re \cdot Sc} \nabla^{*2} C_A^*$$

Espressione del tutto analoga a:

$$\frac{DT^*}{D\tau^*} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^{*2} T^*$$

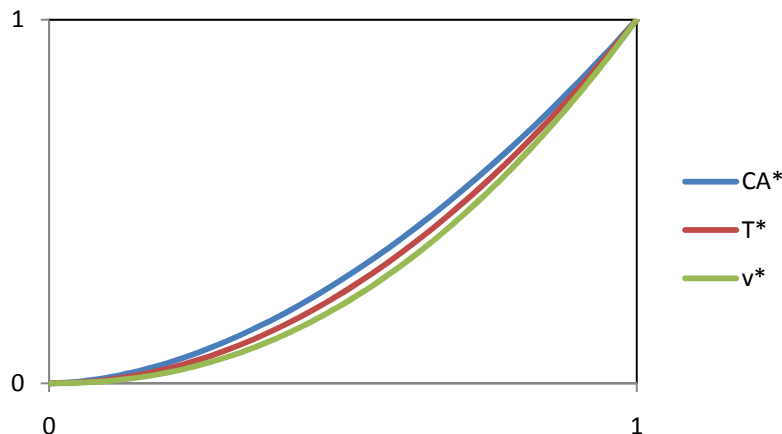
In particolare nel caso di diffusione del vapore in aria abbiamo che  $Sc = 0,6$  e  $Pr = 0,7$  e quindi i due problemi (diffusivo e termico) si possono considerare identici ed i due profili coincidono.

Se riportiamo la versione adimensionalizzata dell'eq. di Navier

$$\frac{D\vec{v}^*}{D\tau^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{v}^*$$

abbiamo la possibilità di riportare anche l'andamento della velocità adimensionalizzata.

Nel grafico seguente sono mostrati gli andamenti di concentrazione, temperatura e velocità adimensionali. Come si può vedere queste tre grandezze hanno andamento simile, ma differenti percorsi, a causa delle diverse condizioni al contorno.



Se ipotizziamo che il termine  $-\nabla^* p^*$  nell'eq. di Navier adimensionalizzata, relativo al gradiente di pressione, sia trascurabile, allora l'analogia torna ad essere completa.

Nel caso di vapore in aria sarebbe  $Sc = Pr = 1$  ed otteniamo, quando le ipotesi sono verificate, l'analogia di Reynolds: il problema diffusivo e quello termico sono lo stesso problema, quindi la soluzione dell'equazione è la stessa ed abbiamo che:

$$C_A^* = v^* = T^*$$

(si impacca tutto in un numero, ad esempio il coeff. di diffusione)

Devo adimensionalizzare anche le condizioni al contorno.

Alla parete:

$$\dot{N}_A = h_m(C_{AP} - C_{A\infty}) = -D_{AB} \left. \frac{\partial C_A}{\partial z} \right|_p$$

$$\dot{q} = h(T_p - T_\infty) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_p$$

Il fluido esercita uno sforzo tangenziale alla parete  $\tau$  pari a

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 C_f = -\mu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_p$$

dove  $\frac{\xi}{4}$  è chiamato fattore d'attrito per moti interni.

Adimensionalizzando le precedenti tre equazioni, otteniamo

$$\left. \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right|_p = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \frac{L}{v_\infty} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} \frac{v_\infty \rho L}{2\mu} = \frac{C_f}{2} Re$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right|_p = \frac{h(T_p - T_\infty)}{\lambda} \frac{L}{(T_p - T_\infty)} = \frac{hL}{\lambda} = Nu$$

$$\left. \frac{\partial C_A^*}{\partial z^*} \right|_p = \frac{h_m(C_{AP} - C_{A\infty})}{D_{AB}} \frac{L}{(C_{AP} - C_{A\infty})} = \frac{h_m L}{D_{AB}} = Sh$$

In condizioni di analogia, i tre gradienti alle parete sono uguali perché i tre profili devono essere uguali:

Quindi, quando possiamo trascurare il gradiente di pressione e  $Sc = Pr = 1$ , le tre equazioni si equivalgono e possiamo scrivere l'analogia di Reynolds:

$$Sh = Nu = \frac{C_f}{2} Re$$