

Lo scatolone adiabatico

Si consideri un recipiente chiuso, non deformabile, isolato dall'ambiente esterno e separato in due parti distinte per mezzo di un setto estraibile meccanicamente e termicamente isolante.

Si supponga che nelle due porzioni del recipiente si trovi acqua allo stato liquido e sotto forma di vapore saturo, in condizioni di equilibrio, rispettivamente nelle quantità di 1 e 2 kg, alle pressioni di 9,8 e 0,98 bar e con un titolo di 0,1 e 0,5.

Si determinino pressione e titolo all'interno del recipiente una volta che è stato estratto il setto e che si è lasciato il sistema a riposo per un tempo sufficientemente lungo perché si sia determinata una nuova situazione di equilibrio.

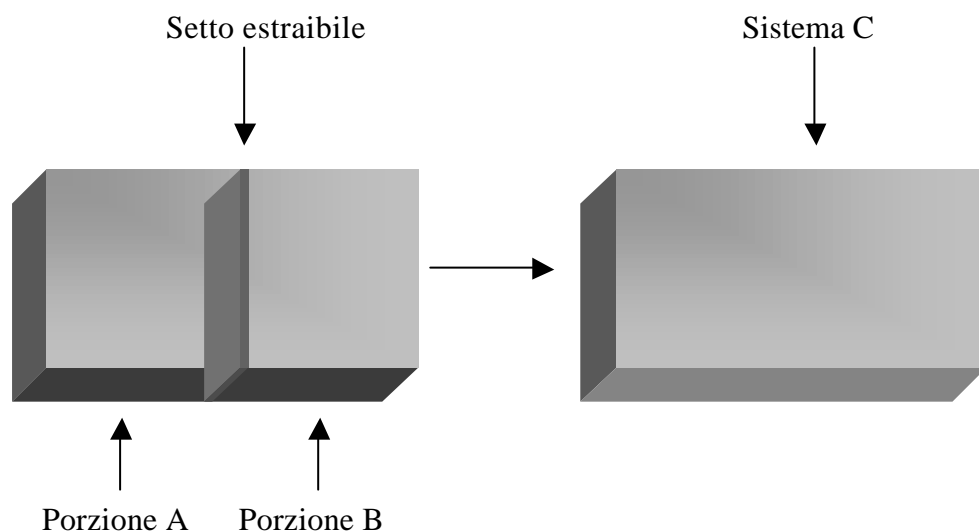


Figura 1-Esercizio 1

Soluzione

Si assuma come sistema il recipiente stesso e siano A e B due porzioni del sistema chimicamente e fisicamente omogenee individuate all'interno del recipiente dal setto estraibile (figura 1).

Siano $M_A=1$ kg, $P_A=9,8$ bar e $x_A=0,1$ rispettivamente la massa, la pressione il titolo misurate nella porzione A del sistema. Analogamente siano $M_B=2$ kg, $P_B=0,98$ bar e $x_B = 0,5$ le rispettive grandezze caratterizzanti la porzione B del sistema.

Innanzitutto osserviamo che le temperature delle due porzioni A e B del sistema sono stati considerati come dati impliciti del problema. Come si può osservare dal diagramma di figura 2, infatti, nella regione di equilibrio liquido-vapore, ovvero al di sotto delle curve limite ac e bc, pressione e temperatura non sono variabili indipendenti ma una delle due è univocamente determinata al fissare dell'altra. Tutto ciò in accordo con il fatto che un sistema fisicamente e chimicamente omogeneo è completamente descritto da due coordinate termodinamiche che, in questo caso, sono la pressione ed il titolo.

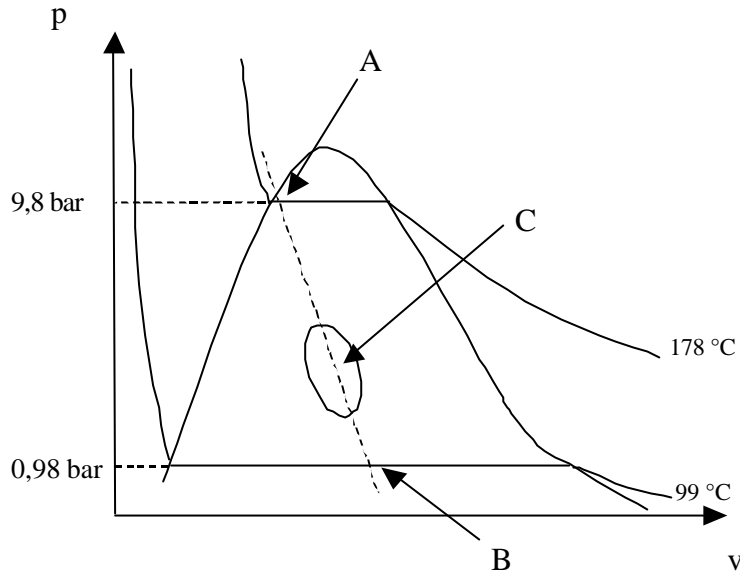


Figura 2-Diagramma (p,v) dell'acqua

Prima di addentrarci nella soluzione rigorosa dell'esercizio cerchiamo di valutare le due coordinate termodinamiche P_C e x_C , vale a dire la pressione ed il titolo nella situazione di equilibrio finale C del sistema.

Chiariamo che quella che dobbiamo descrivere è la situazione del sistema C all'equilibrio; non possiamo infatti descriverne l'evoluzione immediatamente dopo l'estrazione del setto sfruttando la termodinamica dell'equilibrio come non potremmo, del resto, sperare di descriverla tramite coordinate termodinamiche, che hanno senso solamente in situazioni di equilibrio.

Supponiamo allora legato da relazione lineare il comportamento del sistema nei due istanti considerati. Come diretta conseguenza il punto C di coordinate termodinamiche (P_C, V_C) dovrà trovarsi nel diagramma (p,v) sulla retta passante per i punti A e B come mostrato in figura 2. Supponendo inoltre che le grandezze termodinamiche cercate siano determinabili come medie pesate delle corrispondenti grandezze in A ed in B e sapendo che:

$$M_C = M_A + M_B = 3 \text{ kg} \quad (1)$$

(il sistema è infatti un sistema chiuso ed è quindi valido il principio di conservazione della massa) possiamo concludere che la coordinata del punto C sulla retta AB, scelta la origine in A è data da:

$$x_C = \frac{M_B}{M_C} x_B + \frac{M_A}{M_C} x_A \quad (2)$$

ovvero:

$$x_C = \frac{2}{3} x_B \quad (3)$$

come in figura 2.

Ammettendo ora un certo margine di errore dovuto alla reale non linearità della trasformazione effettuata, possiamo pensare che le coordinate termodinamiche (P_C, V_C) siano individuate da un punto del diagramma termodinamico contenuto nell'ellissoide di asse AB e centrato in C come mostrato in figura 2.

Quello che ci aspetteremo sarà allora un risultato del tipo:

$$x_C \cong 0,35 P_C \cong 3 \text{ bar} \quad (4)$$

Cerchiamo ora la soluzione attraverso un metodo più rigoroso. Avendo a che fare con un numero di incognite pari a due dovremo cercare, come minimo, due equazioni indipendenti cioè che traggano origine da principi fisici separati perché il problema sia matematicamente risolvibile.

Una prima equazione è rappresentata dalla (1), che proviene dalla diretta applicazione del principio di conservazione della massa al sistema chiuso. Oltre a ciò, il sistema è da considerarsi isolato, quindi incapace di dar luogo a scambi di calore o lavoro con l'esterno per cui, dal primo principio della termodinamica, otteniamo immediatamente che:

$$U_C = U_A + U_B \quad (5)$$

cioè che l'energia totale interna al sistema si conserva durante la trasformazione.

Sfrutteremo, inoltre, una terza equazione, che risulta essere vera se supponiamo trascurabile il volume occupato dal setto estraibile rispetto al volume dell'intero recipiente. Secondo questa equazione:

$$V_C = V_A + V_B \quad (6)$$

Introducendo ora i volumi specifici v_C , v_B e v_A la (6) diviene:

$$M_C v_C = M_A v_A + M_B v_B \quad (7)$$

Ricordiamo ora che per i volumi specifici ed il titolo dei vapori saturi vale la relazione lineare:

$$v(x) = v_L + x v_d \quad (8)$$

dove v_L e v_d sono, rispettivamente, i volumi specifici della fase liquida e quello differenziale univocamente determinati, al fissare della pressione, dalla tabella 2 riportata al termine dell'esercizio.

Otteniamo quindi che la (7) può essere riscritta come:

$$M_C v_C = M_A (v_{LA} + x_A v_{dA}) + M_B (v_{LB} + x_B v_{dB}) \quad (9)$$

Utilizzando ora la (9) e la (1) possiamo ottenere il volume specifico v_C come:

$$v_C = \frac{M_A (v_{LA} + x_A v_{dA}) + M_B (v_{LB} + x_B v_{dB})}{M_A + M_B} \quad (10)$$

ovvero, numericamente:

$$v_C = \frac{1 \cdot (0,001 + 0,1 \cdot 0,19) + 2(0,001 + 0,5 \cdot 1,67)}{1 + 2} = 0,564 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (11)$$

dove le unità di misura sono state prese nel S.I. e le grandezze costanti non fornite dal testo sono state derivate dalle già citate tabelle per il vapore saturo.

A questo punto, in totale analogia con la soluzione di carattere spannometrico prima ottenuta, possiamo ottenere, sfruttando un diagramma (p,v) sufficientemente preciso, una soluzione grafica che determini il punto C come intersezione della già utilizzata retta AB del grafico di figura 2 con la retta parallela all'asse delle pressioni e passante per il punto (0, v_C). Tale risultato rimane comunque fondamentalmente affetto da errore e non è da considerarsi come soluzione precisa del problema data la non effettiva linearità della trasformazione supposta durante la costruzione della retta AB.

Sapendo ora che, in generale, l'energia interna specifica per i vapori saturi può essere scritta come:

$$u(x) = u_L + x u_d \quad (12)$$

con u_L e u_d energia interna specifica rispettivamente della fase liquida e differenziale, possiamo utilizzare la (5) e ricavare l'energia interna specifica per il sistema C come:

$$u_C = \frac{M_A(u_{LA} + x_A u_{dA}) + M_B(u_{LB} + x_B u_{dB})}{M_C} \quad (13)$$

ovvero, numericamente:

$$u_C = \frac{1 \cdot [759 + 0,1 \cdot 1831,8] + 2 \cdot [415 + 0,5 \cdot 2131,3]}{3} = 1287 \text{ kJ/kg} \quad (14)$$

dove si sono sempre sfruttate le tabelle di vapore saturo per la determinazione delle costanti, si sono espresse le energie in kJ e le pressioni in kPa.

Il punto C sul diagramma (p,v) è ora univocamente determinato, si sono infatti fissate due coordinate termodinamiche che, per i sistemi omogenei, sappiamo essere sufficienti ad una completa descrizione dello stato del sistema. Vogliamo tuttavia ricavare le due coordinate richieste dal problema: x_C e P_C .

Il sistema che ci permette di svolgere tale operazione è dato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} v_C &= v_{LC} + x_C v_{dC} = 0,564 \text{ m}^3/\text{kg} \\ u_C &= u_{LC} + x_C u_{dC} = 1287 \text{ kJ/kg} \end{aligned} \quad (15)-(16)$$

Osserviamo che, sebbene il sistema sia fisicamente risolvibile poiché le uniche incognite sono x_C e P_C mentre v_{LC} , v_{dC} , u_{LC} e u_d sono determinate, fissata P_C , tramite le tabelle di vapore saturo, non siamo di fronte ad un problema algebricamente ben posto poiché non è possibile formulare le seconde grandezze come funzione delle prime. In altri termini non possiamo ottenere una soluzione del sistema in forma chiusa.

Nasce, a questo punto, un problema di calcolo numerico della soluzione che può essere risolto utilizzando, principalmente, due metodi differenti.

Un primo metodo, detto anche metodo Monte Carlo, consiste nel ricercare la soluzione, a meno di un errore fissato, scegliendo e testando valori totalmente casuali per una delle due grandezze cercate.

Supponiamo infatti di scegliere, in modo casuale, il valore di P_C . Così facendo vengono automaticamente fissate tutte le grandezze in gioco (utilizzando le tabelle di vapore saturo e l'equazione (15)) e diventa possibile testare la correttezza della soluzione ottenuta tramite la restante equazione (16), che deve risultare una identità.

Con un certo numero di tentativi, in linea teorica infinito, si giunge allora alla soluzione del sistema. Notiamo che l'utilizzo di questo metodo, in apparenza impraticabile, si rivela proficuo date le vaste potenzialità e la rapidità di calcolo raggiunta oggi giorno dai calcolatori elettronici. La risoluzione del problema si riduce allora alla formulazione di un valido algoritmo che preveda la generazione di numeri casuali, all'interno di un certo intervallo della retta reale (generalmente scelto attorno al valore di pressione ottenuto all'inizio dell'esercizio).

Un secondo metodo di soluzione del problema può essere rappresentato da uno dei così detti metodi iterativi. A differenza del metodo Monte Carlo, che si basava sulla generazione totalmente casuale del numero rappresentante la potenziale soluzione, vogliamo ora pilotare la scelta dei tentativi quantomeno successivi al primo.

Scegliamo allora una pressione P_C^1 approssimativamente pari a quella ottenuta nella (4) in modo del tutto approssimato. Utilizzando l'equazione (15) e le tabelle di vapore saturo otteniamo quindi, come già fatto nell'applicare il metodo Monte Carlo, tutti gli altri valori incogniti del problema. Sempre come per il precedente metodo risolutivo possiamo ora testare la soluzione tramite l'equazione (16). A questo punto, supponendo di non essere di fronte ad un risultato soddisfacente, possiamo pilotare la scelta del successivo valore di P_C ripetendo il procedimento sopra descritto per due valori di pressione, uno superiore e l'altro inferiore a P_C^1 , e scegliendo come P_C^2 quello al quale corrisponde un valore di u_C , ottenuto dalla (16), più vicino a quello reale di 1287 kJ/kg.

I successivi valori di pressione saranno poi determinati sottraendo o sommando una quantità arbitraria a quelli direttamente precedenti a seconda che il valore di P_C^1 sia maggiore o minore di quello di P_C^2 . Si proseguirà con questo procedimento fintanto che i valori di u_C ottenuti, sempre dalla (16), non cominceranno a divergere dal valore fissato di 1287 kJ/kg, istante nel quale si saranno individuati due valori P_C^n e P_C^m tali per cui : $u_C^n < u_C < u_C^m$.

Ora il corretto valore di pressione, soluzione del sistema, può essere determinato con precisione teoricamente infinita tramite un semplice metodo di bisezione.

Applichiamo allora questo metodo al problema che abbiamo posto ottenendo così la tabella 1.

Num. iterazione	P_C (bar)	x_C	u_C (kJ/kg)
1	3	0,94	2425
2	1,96	0,65	1820
3	1,47	0,49	1472
4	1,18	0,4	1266

Tabella 1

Osserviamo che, in questa applicazione del metodo iterativo, la convergenza si è ottenuta diminuendo il valore iniziale di pressione, fermandosi poi al valore 4 di P_C a cui corrisponde un valore di energia interna inferiore a quello reale (pari a 1287 kJ/kg). Ulteriori iterazione avrebbero infatti portato a divergere dal valore reale.

Tralasciando di applicare il sopraccitato metodo di bisezione tra i valori estremanti di 1472 kJ/kg e 1266 kJ/kg (e quindi tra i valori di pressione di 1,47 bar e 1,18 bar) possiamo adottare come soluzione i valori di pressione e titolo ottenuti durante l'ultima iterazione, caratterizzati da un sufficiente grado di precisione. Pertanto si avrà che : $x_C=0,4$ e $P_C=1,18$ bar =118 KPa.

Come nota conclusiva osserviamo che potevano essere utilizzati diversi tipi di metodi iterativi per ottenere la soluzione cercata anche se la convergenza di ciascuno, non è, in generale, indipendente dalla scelta del valore di partenza. Un valore di partenza approssimativamente pari al reale valore risolutivo, infatti, agevola la buona riuscita del metodo; il che sottolinea, ancora una volta, l'importanza della prima soluzione ottenuta, sebbene questa fosse basata su di un presupposto di linearità della trasformazione fondamentalmente errato.