Esercizio 1

Calcolare la potenza di una pompa necessaria a far scorrere il fluido attraverso un tubo collegato a un serbatoio, fino a farlo fuoriuscire all’estremità:

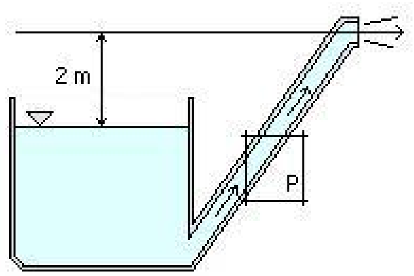


Figura 1

sapendo che:

- la sezione 2, corrispondente all’uscita del fluido dal tubo, è posta ad una distanza di 2 metri dal pelo libero dell’acqua (sezione 1)
- H = 50 metri
- D = 100 mm
- L = 1 km
- ρ= $920 Kg/m^3$
- M=8,5 Poise
- $\dot{V}$ = 20 l/s

Scriviamo l’equazione di Bernoulli in questo modo, semplificando le pressioni:

$$\frac{w^2}{2} + gH + R = -l$$

Sapendo, poi, che $\dot{Q} = w \cdot A$, ricaviamo:

$$w = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{(20 \cdot 10^{-3}) m^3/s}{\frac{\pi \cdot (0{,}1m)^2}{4}} = 2{,}55 m/s$$

Per adeguare tutti i valori al S.I. $\dot{V} = 20 l/s$ *è stato convertito in* $(20 \cdot 10^{-3} = ...)$ *0,02* m^3/s

Per ricavare $R = \frac{64}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{w^2}{2}$, calcoliamo il numero di Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot w \cdot D}{\mu} = \frac{920 Kg/m^3 \cdot 2{,}55 m/s \cdot 0{,}1m}{(8{,}5 \cdot 10^{-1}) Pa} = 276$$

Per adeguare tutti i valori al S.I. M=8,5 Poise è stato convertito in $\left(8{,}5\cdot 10^{-1}=\ldots\right)$ *0,85 Pa*

Con tale valore del numero di Reynolds, ci si trova chiaramente nella prima parte del grafico, ovvero in un regime di tipo laminare.
In questo caso sono state trascurate le perdite concentrate, perché essendo la lunghezza del tubo pari ad 1Km, esse non incidono in maniera significativa, pur essendo presenti all'imbocco e all'uscita del condotto.
Posso trovare il valore di λ sul grafico, oppure facendo $\frac{64}{\mathrm{Re}}=\frac{64}{276}=0{,}23$
A questo punto ho gli elementi necessari per calcolare le perdite di carico:

$$R=\lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{w^2}{2}=0{,}23\cdot\frac{1000m}{0{,}1m}\cdot\frac{\left(2{,}55m/s\right)^2}{2}=7478J/Kg$$

Il lavoro specifico della pompa potrà essere ricavato dall'equazione di Bernoulli

$$-l_s=gH+R+\frac{w^2}{2}=9{,}8m/s^2\cdot 50m+7478J/Kg+\frac{\left(2{,}55m/s\right)^2}{2}=7971J/Kg$$

Per calcolare la potenza, ora mi basta inserire i valori ottenuti nella formula:

$$\dot{L}=-l_s\cdot\rho\cdot\dot{V}=7971J/Kg\cdot 920Kg/m^3\cdot 0{,}02m^3/s=147KW$$

147KW sarà quindi il valore della potenza necessaria alla pompa.

Caratterizzazione di una pompa

Il funzionamento di una pompa idraulica è analogo a quello di un generatore di tensione, come descritto in figura:

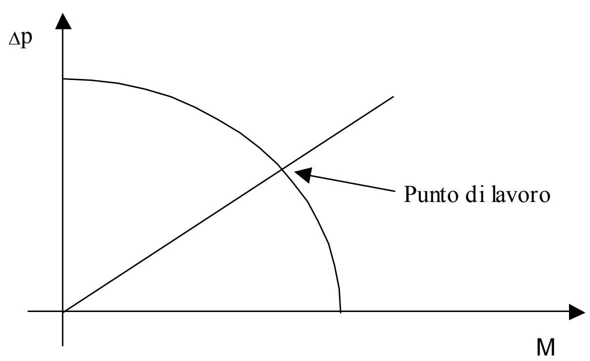


Figura 2. Grafico prevalenza/portata di una pompa

dove **Δp** rappresentata la prevalenza, valere a dire la differenza di pressione ai capi della pompa, in funzione di della portata, rispettivamente al posto della tensione e della corrente, come nel comportamento ideale dei generatori elettrici la linea

dovrebbe essere orizzontale, ma a causa della viscosità del liquido, che traduce una sorta di resistenza interna, é in realtà decrescente.
Sul grafico è facile individuare il punto in cui la curva intercetta l'asse della ascisse, dove cioè abbiamo massima portata ma prevalenza nulla ,oltre il quale, quindi, la pompa gira a vuoto, come per altro avviene nei generatori di tensione nel punto di cortocircuito.
Nel caso trattato, il carico applicato alla pompa era di tipo lineare, questo nei circuiti idraulici è assimilabile al caso di regime laminare vista la dipendenza del moto principalmente dalla sua velocità, nel moto turbolento il carico non è più lineare è il parallelismo idro-elettrico è inaccettabile vista l'imprevedibilità di un moto perturbato.

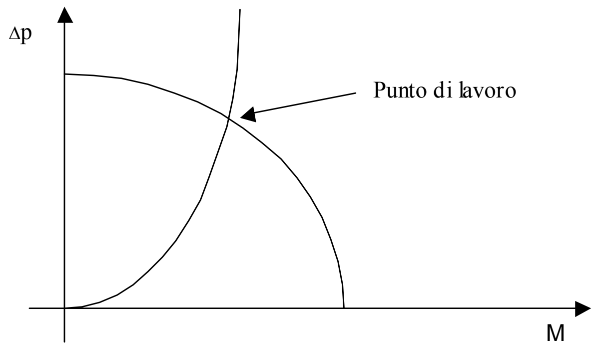


Figura 3. Grafico ipotetico di pompa in regime laminare

Esercizi sul moto dei fluidi

Esercizio n° 1 – Esempi di ciclo iterativo

Testo

In un tubo orizzontale di diametro **D**=15cm e lunghezza **L**=300m scorre acqua con una portata $\dot{V} = 1800$ l/min ad una temperatura di 27° C.
Calcolare quanto varia la portata se l'acqua viene raffreddata fino a 5° C considerando che la potenza della pompa è costante (ΔP_{pom}=costante)(coeff. di rendimento $\eta_{pompa} = 0.6$).

Dati

L = 300 m
ΔP_{pom}=costante
$\dot{V}$=1800 l/min
$T_{iniz} = 27$ ° C

$T_{fin} = 5° \text{ C}$
D =15 cm
$\eta_{pompa} = 0.6$

Soluzione

Ricaviamo dapprima la viscosità cinematica υ_1 dal rapporto tra la viscosità statica μ_1 e la densità dell'acqua ρ_1, i cui valori sono stati ottenuti su tabelle apposite considerando il liquido alla temperatura di 27° C e alla pressione di 1 BAR.

$$\upsilon_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1} = \frac{8.57 \cdot 10^{-4}}{996}\left[\frac{Pa \cdot s}{Kg/m^3}\right] = 8.6 \cdot 10^{-7}\, m^2\!/s$$

Ora calcoliamo il numero di Reynolds per risalire, tramite il diagramma di Moody, al fattore di attrito ξ e comprendere anche sotto quale tipo di regime ci troviamo (laminare, di transizione o turbolento).
Per determinare la velocità del fluido dividiamo la portata per la sezione del tubo:

$$w_1 = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\frac{1.8}{60}}{\pi\frac{0.15^2}{4}}\left[\frac{m^3/s}{m^2}\right] = 1.7\, m\!/s$$

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{w_1 \cdot D}{\upsilon_1} = \frac{1.7 \cdot 0.15}{8.6 \cdot 10^{-7}} = 296512$$

Determinato il valore (siamo in regime fortemente turbolento) possiamo, conoscendo la scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$, valutare il fattore di attrito ξ_1 avvalendoci del diagramma di Moody.
Otteniamo così ξ_1=0.0145
Calcoliamo le perdite distribuite:

$$\Delta p = \xi\frac{L}{D}\rho\frac{w^2}{2} = \frac{996 \cdot 0.0145 \cdot 300 \cdot 1.7^2}{0.15 \cdot 2} = 41737 Pa \cong 0.417 Bar$$

Dunque la potenza della pompa è:

$$P_{pompa} = \dot{V} \cdot \Delta p = \frac{1.8 \cdot 4.17 \cdot 10^4}{60} = \left[\frac{m^3 \cdot Pa}{s}\right] = 1251 W$$

Dato che la pompa ha un rendimento $\eta_{pompa} = 0.6$, la potenza effettiva risulta:

$$P_{eff} = \frac{P_{teor}}{\eta} = \frac{1251}{0.6} = 2085 W$$

Se riduco la temperatura avrò delle variazioni nei valori della viscosità e quindi nel numero di Reynolds, mentre per ipotesi, terrò la velocità w_1 costante.

$$\upsilon_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2} = \frac{15.155 \cdot 10^{-4}}{995.5} = 1.52 \cdot 10^{-6} \, m^2\!/\!s$$

$$w_1 = \frac{\overset{o}{V}}{A} = \frac{\frac{1.8}{60}}{\pi \frac{0.15^2}{4}} \left[\frac{m^3/s}{m^2} \right] = 1.7 \, m\!/\!s$$

Quindi avrò

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{w_1 \cdot D}{\upsilon_2} = \frac{1.7 \cdot 0.15}{1.52 \cdot 10^{-6}} = 167800$$

e consultando il diagramma di Moody mantenendo il precedente valore di scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D}$ e utilizzando il nuovo numero di Reynolds, ottengo:

$$\xi_2 = 0.0163$$

Il fattore di attrito è aumentato(Reynolds invece è diminuito) e, poiché abbiamo supposto costante la potenza della pompa, deve essere calata la portata. Se è calata la portata, però dovrà diminuire anche la velocità che in un primo momento avevamo supposto costante.

$$P_{pompa} = \dot{V}\Delta p_2 = 1251W$$

$$\Delta p_2 = \rho_2 \xi_2 \frac{L}{D}\frac{w_2^2}{2} = 995.5 \cdot 0.0163 \cdot \frac{300}{0.15} \cdot \frac{1.7^2}{2} = 46895$$

$$\dot{V}_2 = \frac{P}{\Delta p_2} = 0.0269 \, m^3\!/\!s \rightarrow \dot{V}_2 = 1614 \, l\!/\!\min$$

La velocità sarà $w_2 = \frac{\dot{V}_2}{A} = 1.522 \, m\!/\!s$

Ricalcolando i vari coefficienti e parametri dovrò ora tenere la nuova velocità. Ottengo:

$$\mathrm{Re}'' = \frac{w_2 \cdot D}{\upsilon_2} = \frac{1.522 \cdot 0.15}{1.52 \cdot 10^{-6}} = 150197 \rightarrow \xi'' = 0.0168$$

$$\Delta p'' = \rho_2 \xi'' \frac{L}{D}\frac{w_2^2}{2} = 995.5 \cdot 0.0168 \cdot \frac{300}{0.15} \cdot \frac{1.522^2}{2} = 38741$$

Ma la nuova portata varrà:

$$\dot{V}'' = \frac{P}{\Delta p''} = 0.0323 \, m^3\!/\!s \rightarrow \dot{V}'' = 1938 \, l\!/\!\min$$

Il processo iterativo non converge per cui adesso provo a mantenere costante la prevalenza e non più la velocità.

$$P_{pompa} = \dot{V}\Delta p_2 = 1251W$$

$$\Delta p'_{prev\cos t} = \Delta p_1 = \rho_2 \xi_2 \frac{L}{D}\frac{w_2^2}{2} = 41737\,Pa \rightarrow w'_{prev\cos t} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p'_{prev\cos t}}{\rho_2 \cdot \xi_2 \cdot L/D}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 41737}{995.5 \cdot 0.0163 \cdot 300/0.15}} = 1.604\, m/s$$

e calcolo la nuova portata:

$$\dot{V}'_{prev\cos t} = w'_{prev\cos t} \cdot A = 1.604 \cdot \pi \cdot \frac{0.15^2}{4} = 0.02834\, m^3/s \rightarrow \dot{V}'_{prev\cos t} = 1700.4\, l/\min$$

la nuova prevalenza sarà, dovendo essere la potenza costante:

$$P = \Delta p''_{prev\cos t} \cdot \dot{V}'_{prev\cos t} \rightarrow \Delta p''_{prev\cos t} = 44143\,Pa$$

adesso utilizzo la nuova prevalenza per iterare ulteriormente calcolando il nuovo numero di Reynolds, la nuova velocità e un'ulteriore prevalenza:

$$\mathrm{Re}'_{prev\cos t} = \frac{w'_{prev\cos t} \cdot D}{\upsilon_2} = \frac{1.604 \cdot 0.15}{1.52 \cdot 10^{-6}} = 158289 \rightarrow \xi'_{prev\cos t} = 0.0165$$

il nuovo valore della velocità sarà:

$$w''_{prev\cos t} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p''_{prev\cos t}}{\rho_2 \cdot \xi'_{prev\cos t} \cdot L/D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44143}{995.5 \cdot 0.0165 \cdot 300/0.15}} = 1.64\, m/s$$

mentre quello della portata:

$$\dot{V}''_{prev\cos t} = w''_{prev\cos t} \cdot A = 1.64 \cdot \pi \cdot \frac{0.15^2}{4} = 0.0290\, m^3/s \rightarrow \dot{V}''_{prev\cos t} = 1740\, l/\min$$

e calcolando la prevalenza otteniamo un valore prossimo a quello definitivo:

$$P = \Delta p'''_{prev\cos t} \cdot \dot{V}''_{prev\cos t} \rightarrow \Delta p'''_{prev\cos t} = 43138\,Pa$$

> In queste tipologie di problema che coinvolgono cicli iterativi, vale una regola empirica che tende a tenere costante il termine con esponente minore e far variare il termine con esponente maggiore; nelle formule precedenti, per esempio, la velocità, che era elevata al quadrato, è stata fatta variare mentre la prevalenza è stata tenuta costante.

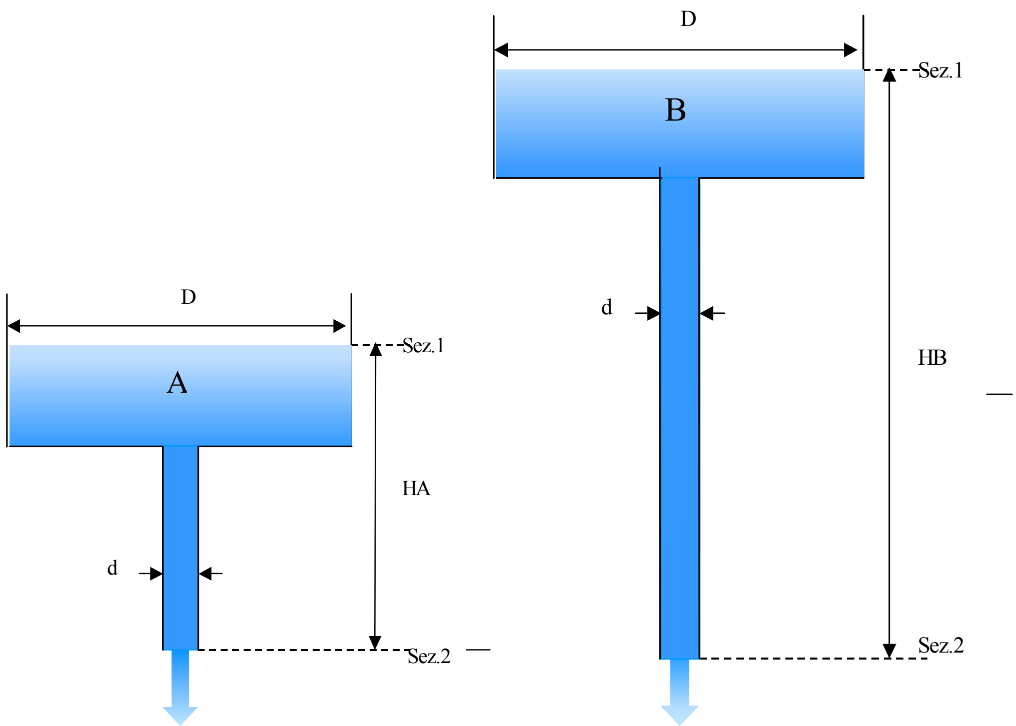
Esercizio n° 2 – Lo svuotamento di due serbatoi

Testo

A due serbatoi uguali di forma cilindrica (A e B) di diametro D=1m riempiti di acqua ($\upsilon_{acqua} = 1 \cdot 10^{-6} \left[m^2/_s \right]$), sono stati applicati alla base due condotti di lunghezza diversa (rispettivamente $H_A = 50m$ e $H_B = 100m$ con $\varepsilon = 0.1mm$) e diametro d=100mm. Determinare quale dei due serbatoi si svuota per primo.

<u>Dati</u>

$H_A = 50m$
$H_B = 100m$
$\varepsilon = 0.1mm$
D=1m
d=100mm
$\upsilon_{acqua} = 1 \cdot 10^{-6} \left[m^2/_s \right]$



Soluzione

Calcoliamo le perdite di carico concentrate e distribuite:

$$R = R_c + R_d$$

$$R_d = \frac{L}{d}\xi\frac{w_2^2}{2}$$

$$R_c = \beta\frac{w_2^2}{2}$$

in cui L è la lunghezza del condotto mentre w_2 è la velocità nella sezione 2.

Applico l'equazione di Bernoulli di bilancio dell'energia:

$$\frac{w_2^2}{2} - gH + \left(\beta\frac{w_2^2}{2} + \frac{L}{d}\xi\frac{w_2^2}{2}\right) = 0$$

esplicitando w_2:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1+\beta+\frac{L}{d}\xi}}$$

Supponiamo che la lunghezza del tubo L sia circa uguale ad H ($L \cong H$). Notiamo che la velocità con cui esce l'acqua dipende dal fattore d'attrito, che a sua volta dipende dalla stessa w_2; dunque è necessario procedere tramite un ciclo iterativo. Ipotizzo di trascurare le perdite distribuite ponendo $\xi' = 0$ (questo permette di considerare il condotto liscio).

$$w_{2a}' \text{ (velocità di primo tentativo)} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.8\cdot 50}{1+0.5}\cdot\left[\frac{m}{s^2}\cdot m\right]} \cong 25.55 m/s$$

$$\mathrm{Re}_a' = \frac{w_{2a}'\cdot D}{\upsilon} = \frac{25.55\cdot 0.1}{1\cdot 10^{-6}} = 2555000$$

Dal diagramma di Moody, considerando una scabrezza relativa

$\frac{\varepsilon}{D} = 0.001$ ottengo $\rightarrow \xi'' \cong 0.019$

Da questo valore ricavo la velocità di secondo tentativo:

$$w_{2a}'' = \sqrt{\frac{2\cdot 9.8\cdot 50}{1.5+\frac{50}{0.1}\cdot 0.019}\cdot\left[\frac{m}{s^2}\cdot m\right]} \cong 9.43\, {}^{m}\!/_{s}$$

$$\mathrm{Re}_a'' = \frac{w_{2a}''\cdot D}{\upsilon} = \frac{9.43\cdot 0.1}{1\cdot 10^{-6}} = 943000$$

ottengo $\rightarrow \xi''' \cong 0.02$

Da questo valore ricavo la velocità di terzo tentativo:

$$w_{2a}''' = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 50}{1.5 + \frac{50}{0.1} \cdot 0.02}} \cdot \left[\frac{m}{s^2} \cdot m\right] \cong 9.23 \, m/s$$

che può essere considerata il risultato definitivo.

Operando in modo analogo con il serbatoio B otteniamo:

$$w_{2b}' = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 100}{1 + 0.5}} \cdot \left[\frac{m}{s^2} \cdot m\right] \cong 36.15 m/s$$

$$\mathrm{Re}_b' = \frac{w_{2b}' \cdot D}{\upsilon} = \frac{36.15 \cdot 0.1}{1 \cdot 10^{-6}} = 3615000$$

Dal diagramma di Moody, considerando una scabrezza relativa $\frac{\varepsilon}{D} = 0.001$

ottengo $\rightarrow \xi'' \cong 0.0189$

Da questo valore ricavo la velocità di secondo tentativo:

$$w_{2b}'' = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 100}{1.5 + \frac{100}{0.1} \cdot 0.0189}} \cdot \left[\frac{m}{s^2} \cdot m\right] \cong 9.80 \, m/s$$

$$\mathrm{Re}_b'' = \frac{w_{2b}'' \cdot D}{\upsilon} = \frac{9.80 \cdot 0.1}{1 \cdot 10^{-6}} = 980000$$

ottengo $\rightarrow \xi''' \cong 0.02$

$$w_{2b}''' = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 100}{1.5 + \frac{100}{0.1} \cdot 0.02}} \cdot \left[\frac{m}{s^2} \cdot m\right] \cong 9.55 \, m/s$$

che è il nostro risultato definitivo.

Abbiamo dimostrato che B si svuota prima rispetto ad A.