

Superfici alettate

Le superfici alettate rappresentano un metodo molto utilizzato per consentire il raffreddamento di superfici che risentono degli effetti del surriscaldamento (ad esempio i transistor di potenza). La loro funzione è agevolare lo scambio termico tra la superficie e il fluido circostante (normalmente aria in convezione naturale) tramite l'aumento della superficie di scambio stessa. Si sa che l'aria è un pessimo scambiatore e in convezione naturale lo scambio è ancora minore; quindi in assenza di ventole che stabiliscano una convezione forzata sulla superficie in questione, la tecnica migliore è quella di ricoprirla di alette (si tratta di una soluzione ampiamente sfruttata nell'elettronica di consumo).

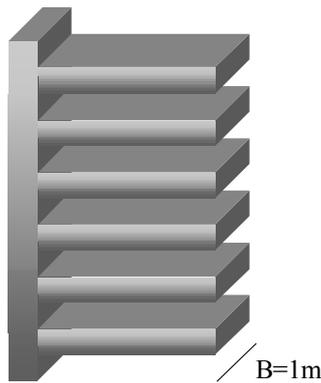


Figura 1: alettatura

Per comodità si considereranno alette che si stendono su una superficie di lunghezza $B=1m$.

Le alette possono essere sagomate in diversi modi (alcuni esempi sono in Figura 2). Le alette triangolari o di forma simile sono migliori di quelle rettangolari, ma molto più complesse da calcolare; per i calcoli, quindi, saranno prese in considerazione solo alette rettangolari.

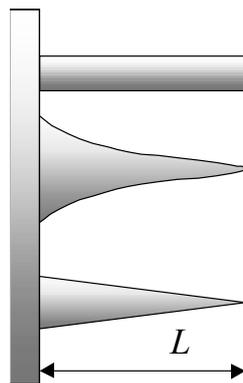


Figura 2: possibili profili di alette

È da notare che la lunghezza L dell'aletta è un fattore non secondario: infatti alette troppo lunghe sarebbero controproducenti, facendo da freno alla circolazione dell'aria nelle altre alette, mentre se fossero troppo corte lo scambio termico sarebbe ridotto. Esiste quindi una dimensione ottima. In ogni modo, nei calcoli che seguono l'effetto frenante delle alette viene trascurato e si considera lo scambio termico per pura convezione con l'esterno.

La figura 3 mostra come la temperatura dell'aletta decresca man mano che ci si allontana dalla base (T_p = temperatura di parete, T_∞ = temperatura ambiente).

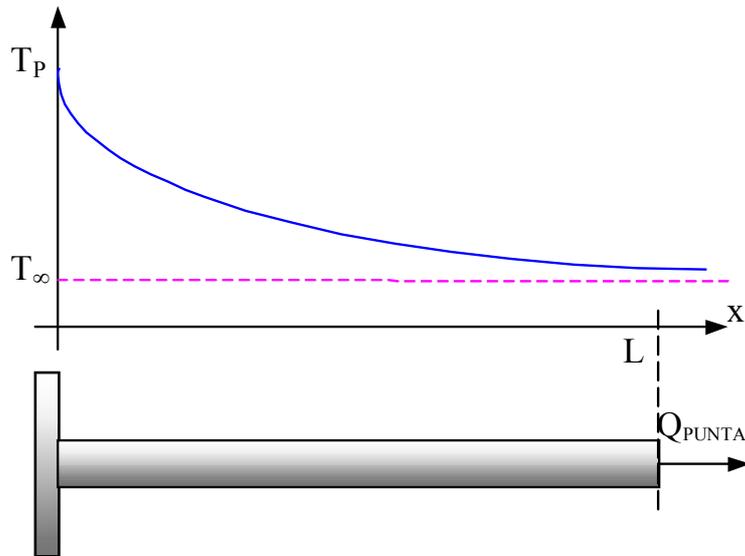


Figura 3

Si fa un'ulteriore ipotesi semplificativa: si trascura la quantità di calore scambiato dalla superficie di testa dell'aletta ($Q_{PUNTA}=0$). Si vedrà più avanti che non è un'ipotesi sempre accettabile.

Normalmente le alette non vengono fuse insieme alla superficie che devono raffreddare (soprattutto nel caso di microprocessori, transistor...); vengono invece “riportate”. Questo fa sì che si presenti una resistenza di contatto R_C nell'interfaccia superficie/aletta che causa una piccola caduta alla base dell'aletta stessa (che quindi viene a trovarsi ad una temperatura inferiore a T_P).

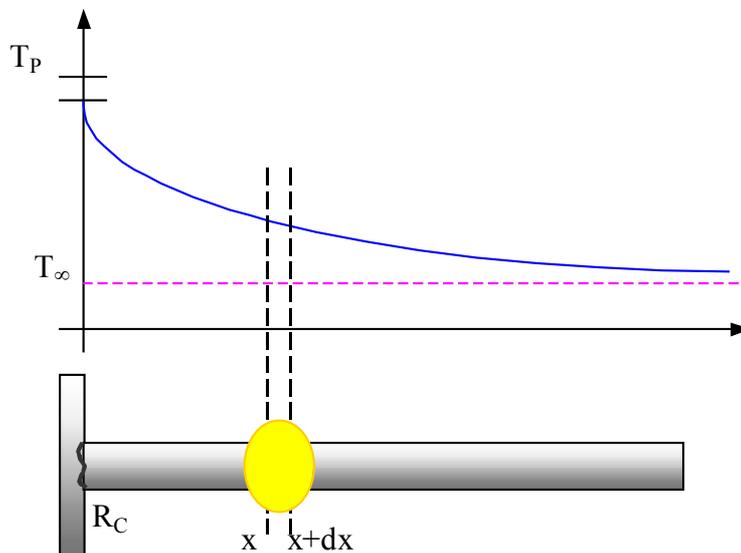


Figura 4

L'area evidenziata in figura 4 (il “concio” elementare di lunghezza dx) viene rappresentata in dettaglio in figura 5. Si noti che la densità di flusso è massima alla base dell'aletta, in quanto la differenza di temperatura tra metallo e aria è più marcata. Le quantità di calore scambiate (indicate come flussi di calore) sono infinitesime lungo i fianchi dell'aletta in quanto si prende in considerazione un tratto infinitesimo della stessa.

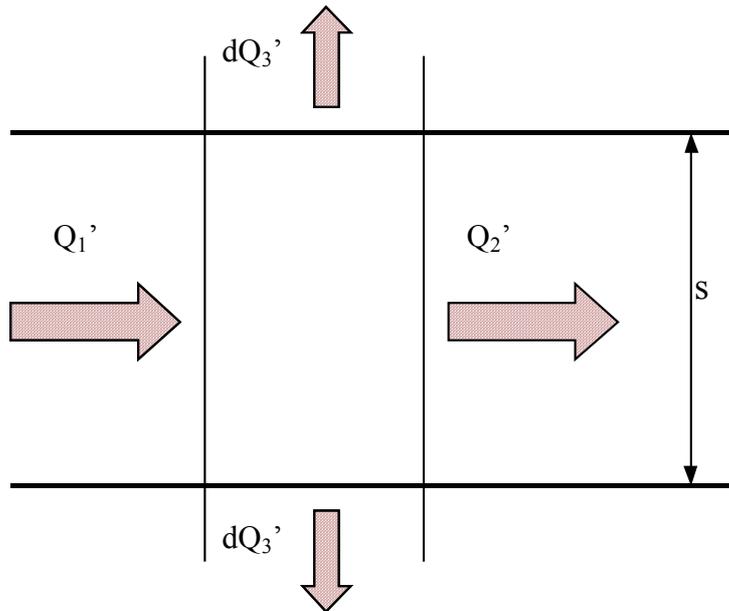


Figura 5: tratto di aletta di lunghezza dx

All'equilibrio quindi il bilancio dei flussi di calore scambiato sarà

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + 2d\dot{Q}_3 \quad (1)$$

Sapendo che λ è la conducibilità termica del materiale dell'aletta possiamo esprimere la legge di Fourier per esprimere la relazione tra densità di flusso di calore e gradiente di temperatura

$$\dot{q}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (2)$$

$$\dot{q}(x+dx) = \dot{q}(x) - \lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx \quad (3)$$

Conoscendo la relazione tra calore e temperatura per la convezione, dalla (1) possiamo scrivere

$$\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = 2d\dot{Q}_3 = 2dx \cdot h[T(x) - T(\infty)] \quad (4)$$

(in cui h è il coefficiente di convezione) e dalle equazioni (2) e (3)

$$\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = s[q(x) - q(x+dx)] = s\lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx = 2d\dot{Q}_3 \quad (5)$$

Da (4) e (5) si può ottenere

$$s\lambda \frac{d^2T}{dx^2} dx = 2dx \cdot h[T(x) - T(\infty)] \quad (6)$$

in cui, chiamando $\theta = T(x) - T(\infty)$ è possibile riconoscere un'equazione differenziale a variabili separabili di 2° grado.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{2\alpha}{s\lambda} \theta \quad (7)$$

Posto

$$\frac{2\alpha}{s\lambda} = m^2 \quad (8)$$

la (7) ha l'aspetto dell'equazione di Helmholtz (in cui, però, compariva il termine $-m^2$). Riutilizzando il risultato ottenuto in acustica, la soluzione è

$$\theta = Ae^{-mx} + Be^{+mx} \quad (9)$$

che è una soluzione smorzata (non oscillante come nel caso dell'equazione di Helmholtz). Al fine di trovare le costanti A e B è necessario imporre delle condizioni al contorno a $x=0$ e a $x=L$. La presenza della R_C rende il calcolo più complesso.

Per $x=0$

$$-\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\theta_P - \theta_0}{R_C} \quad (10)$$

Mentre per $x=L$

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (11)$$

Possiamo quindi ottenere i valori delle due costanti A e B

$$B = \frac{T_P - T_\infty}{(e^{2mL} + 1) + m\lambda R_C (e^{2mL} - 1)} \quad A = \frac{T_P - T_\infty}{(e^{2mL} + 1) + m\lambda R_C (e^{2mL} - 1)} e^{2mL}$$

che sostituiti nelle (9) permettono di trovare l'espressione

$$\theta(x) = T_x - T_\infty = (T_P - T_\infty) \frac{e^{-mx}}{(e^{2mL} + 1) + m\lambda R_C (e^{2mL} - 1)} (e^{2mL} + e^{2mx}) \quad (12)$$

L'equazione (12) rappresenta un risultato che, nella pratica, non viene utilizzato. Infatti risulta molto più utile definire il confronto tra lo scambio termico in presenza dell'aletta e quello in assenza della stessa.

In una striscia di larghezza s il flusso di calore scambiato dalla parete sarà

$$\dot{Q}_P = s \cdot h(T_P - T_\infty) \quad (13)$$

mentre il flusso di calore in presenza dell'aletta è

$$\dot{Q}_A = 2 \int_0^L h(T_x - T_\infty) dx = \frac{2h(T_P - T_\infty)(e^{2mL} - 1)}{m(e^{2mL} + 1) + m^2 \lambda R_C (e^{2mL} - 1)} \quad (14)$$

Facendo il rapporto tra la (14) e la (13) si definisce il guadagno dell'aletta.

Guadagno

$$G = \frac{\dot{Q}_A}{\dot{Q}_P} = \frac{2}{ms} \cdot \frac{1}{\coth(mL) + m^2 \lambda R_C} \quad (15)$$

Il guadagno è un numero ≥ 1 ed è la relazione effettivamente usata nella pratica in quanto dà l'incremento di scambio termico determinato dalla presenza dell'aletta. Si noti che G ha un tetto massimo. Infatti se tutta l'aletta fosse alla temperatura costante T_P il flusso di calore sarebbe

$$\dot{Q}_{A_0} = 2h(T_P - T_\infty)L \quad (16)$$

il che porta alla definizione di un secondo parametro caratteristico dell'aletta, l'efficienza.

Efficienza

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_A}{\dot{Q}_{A_0}} = \frac{1}{mL} \cdot \frac{1}{\coth(mL) + m \lambda R_C} \quad (17)$$

Dalla (15) e dalla (17) si può ottenere

$$G = 2\varepsilon \frac{L}{s} \quad (18)$$

Si tratta di un risultato molto interessante, in quanto mostra che, a parità di efficienza, il guadagno aumenta mettendo alette lunghe e sottili.

Caso dell'aletta tozza ($L=s$)

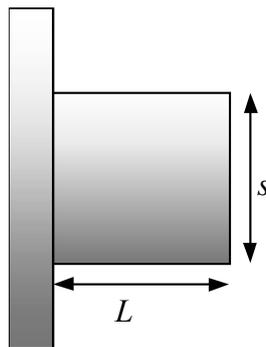


Figura 6: aletta tozza

Il caso dell'aletta tozza è un caso limite: ponendo $L=s$ e considerando l'efficienza unitaria (efficienza massima) infatti si può ottenere il guadagno dalla (17): $G = 2$. È evidente però dalla figura che la quantità di calore dispersa dal "dado" è 3 volte maggiore di quella dispersa dalla superficie in sua assenza. Questo errore dipende dall'aver trascurato il calore scambiato dalla superficie di testa dall'aletta (ipotesi semplificativa iniziale). Per inserirla nelle equazioni ricavate finora si ricorre ad un piccolo artificio: si immagina di spostare una metà della superficie di testa su un lato dell'aletta e l'altra metà sull'altro lato (vedi figura 7).

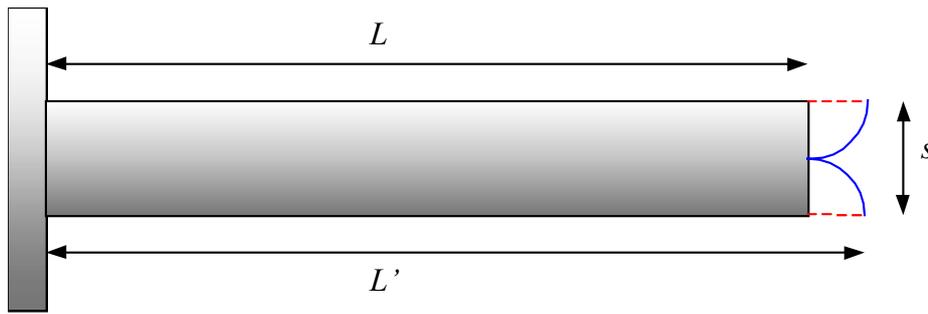


Figura 7: lunghezza efficace dell'aletta

Nelle equazioni ricavate precedentemente basta quindi sostituire L con

$$L' = L + \frac{s}{2} \quad (19)$$

Superficie alettata

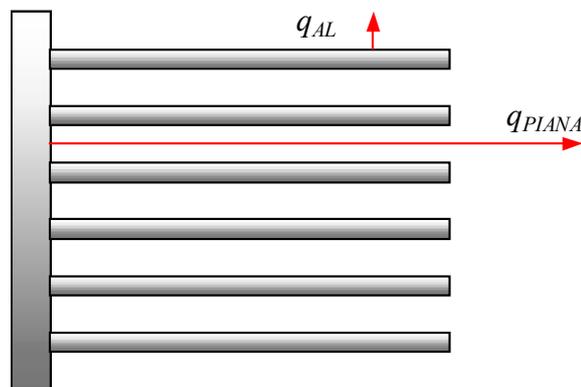


Figura 8

Avendo studiato lo scambio termico di una singola aletta, possiamo prendere ora in considerazione una superficie alettata. Indichiamo con

- S_{TOT} la superficie di partenza che vogliamo raffreddare,
- S_{AL} la porzione su cui vengono montate le alette,
- q_{PIANA} la densità di flusso della superficie piana,
- q_{AL} quella delle alette,
- ε_A l'efficienza della singola aletta.

Vogliamo ricavare l'efficienza ε_{TOT} dell'intera superficie alettata.

La potenza termica totale sarà data dalla somma dei contributi delle alette e della superficie piana

$$\dot{Q}_{TOT} = q_{PIANA}(S_{TOT} - S_{AL}) + q_{AL}S_{AL} \quad (20)$$

La densità di flusso della superficie piana è

$$q_{PIANA} = h(T_P - T_\infty) \quad (21)$$

Dalla definizione di G possiamo anche scrivere

$$q_{AL} = G \cdot q_{PIANA} \quad (22)$$

Sostituendo nella (22) le espressioni di G e di q_{PIANA}

$$q_{AL} = \frac{2\varepsilon_A L'}{s} \cdot h(T_P - T_\infty) \quad (23)$$

Ora conosciamo tutti i termini per esprimere il flusso totale

$$\dot{Q}_{TOT} = h(T_P - T_\infty)(S_{TOT} - S_{AL}) + \frac{2\varepsilon_A L'}{s} h(T_P - T_\infty) \cdot S_{AL} \quad (24)$$

Conoscendo

$$\dot{Q}_{PIANA} = h(T_P - T_\infty) \cdot (S_{TOT} - S_{AL}) \quad (25)$$

possiamo esprimere il guadagno totale del sistema

$$G_{TOT} = \frac{\dot{Q}_{TOT}}{\dot{Q}_{PIANA}} = \frac{2\varepsilon_A L'}{s} \cdot \frac{S_{AL}}{S_{TOT} - S_{AL}} \quad (26)$$

e soprattutto l'efficienza totale dell'alettatura

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{\dot{Q}_{TOT}}{\dot{Q}_{TOT,0}} = 1 - \frac{S_{AL}}{S_{TOT}} (1 - \varepsilon_A) \quad (27)$$

Nel caso di alette non rettangolari il diagramma dell'efficienza viene fornito dal costruttore e le alette possono essere distinte dal fattore di forma. Negli allegati alle dispense di quest'anno vengono riportati grafici, a titolo di esempio. Si nota immediatamente come le alette triangolari siano più efficienti di quelle rettangolari.

Scambiatori di Calore

Gli scambiatori di calore, sono apparecchiature utilizzati al fine di favorire il trasferimento di energia (sotto forma di calore) tra due fluidi a temperature diverse. Possiamo schematizzare uno scambiatore di calore, come un sistema di questo tipo:

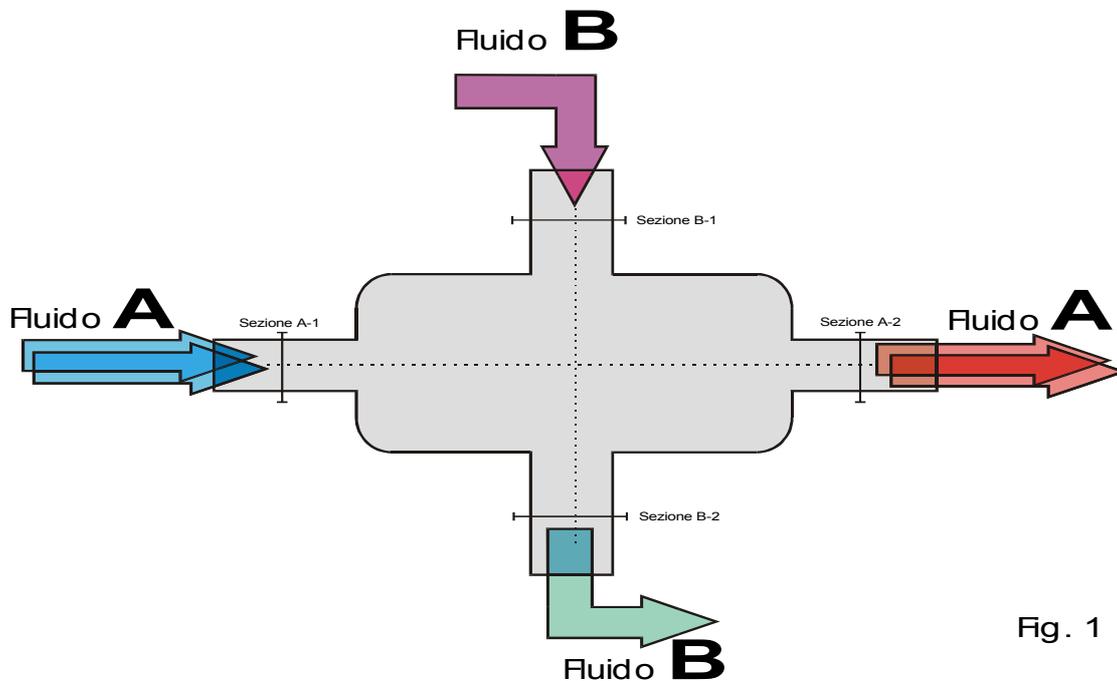


Fig. 1

in cui il fluido A, viene detto fluido di processo e il fluido B viene detto fluido di servizio.

In particolare, avremo scambiatori con e senza contatto tra i due fluidi:

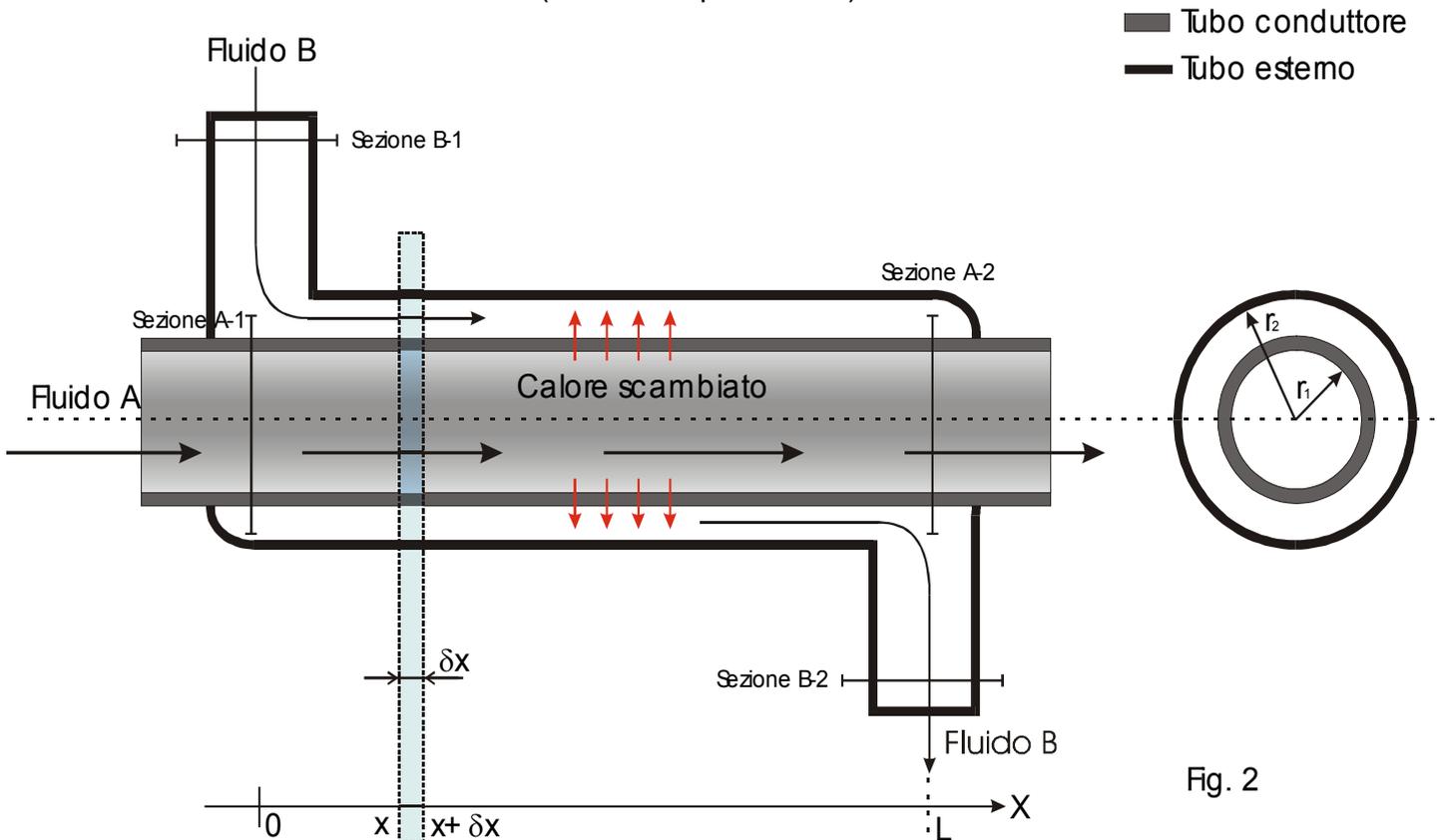
- se il fluido di servizio è “sporco” rispetto al fluido di processo, sarà necessario evitare il contatto tra i due. E’ il caso di diversi processi alimentari, in cui si deve evitare la contaminazione del prodotto. I due fluidi sono separati da una “parete” che ne evita il contatto chimico.
- se il fluido di servizio non è “sporco” rispetto al fluido di processo, A e B possono venire in contatto. E’ il caso per es. del processo di pastorizzazione del latte, in cui il vapore ad alta temperatura si meschia al latte per sterilizzarlo, per poi separarsi nuovamente, una volta finito il processo.

Per quanto riguarda gli scambiatori che evitano il contatto tra i due fluidi, studieremo il modello più semplice ed immediato: lo scambiatore *tubo in tubo*. Per quanto riguarda invece gli scambiatori a contatto tra i fluidi, non verrà fatta alcuna trattazione, poiché lo studio di tali apparecchiature è notevolmente più complicato.

Scambiatori di calore Tubo-in-Tubo

Sono costituiti da due tubi concentrici, in cui passano due fluidi a temperature diverse. Possiamo schematizzare questa apparecchiatura in questo modo:

Scambiatore TUBO-in-TUBO (modello equicorrente)



Il tubo interno dovrà essere fatto con materiali ad alta conducibilità termica, per consentire uno scambio più alto possibile di calore tra i due fluidi: si userà quindi in generale un metallo ad altissima conducibilità, per es. l'acciaio che offre inoltre un'alta resistenza all'usura. In particolare con l'acciaio inox (lucidato) diventa particolarmente semplice anche la pulizia della parte interna del tubo (in cui passa il fluido A), diventando particolarmente indicato nei settori in cui l'igiene è un fattore determinante (industria alimentare). Per quanto riguarda il tubo esterno, non si ha alcuna necessità perché questo sia fortemente conduttivo, per cui si useranno metalli a bassa conducibilità termica (anche se non necessariamente un isolante). Nel nostro caso lo considereremo isolante: questo ci permetterà di non considerare perdite all'esterno nello scambio energetico.

Questo tipo di scambiatore, presenta un'estrema facilità di calcolo per quanto riguarda il dimensionamento delle superfici di scambio e della quantità di calore scambiato, per cui ne permette il calcolo **esatto** delle caratteristiche. Tuttavia risulta essere molto costoso (acciaio inox lucidato) ed ingombrante rispetto alla potenza termica dissipata. E' quindi vantaggioso solo in quei settori in cui è necessaria un'estrema pulizia (settore alimentare e farmaceutico) ed affidabilità, e in cui il valore aggiunto del prodotto copra in breve termine il costo dell'impianto.

A seconda che il fluido B sia entrante o uscente dalla sezione B-1 (considerando il verso positivo dell'asse X come indicato in Fig. 2), avremo scambiatori detti in *Equicorrente* (ovvero A e B hanno lo stesso verso di percorrenza dei tubi) oppure in *Controcorrente* (ovvero B scorre in verso opposto ad A: entra alla sezione B-2 ed esce alla sezione B-1). Come vedremo ognuna delle due soluzioni, presenterà caratteristiche diverse ed utili ad applicazioni diverse.

Per quanto riguarda il calcolo degli scambiatori, occorre distinguere il

Calcolo termico

(dimensionamento delle superfici di scambio)

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{Tot}} \quad (1)$$

Calcolo energetico

(relazioni del I° principio della termodinamica)

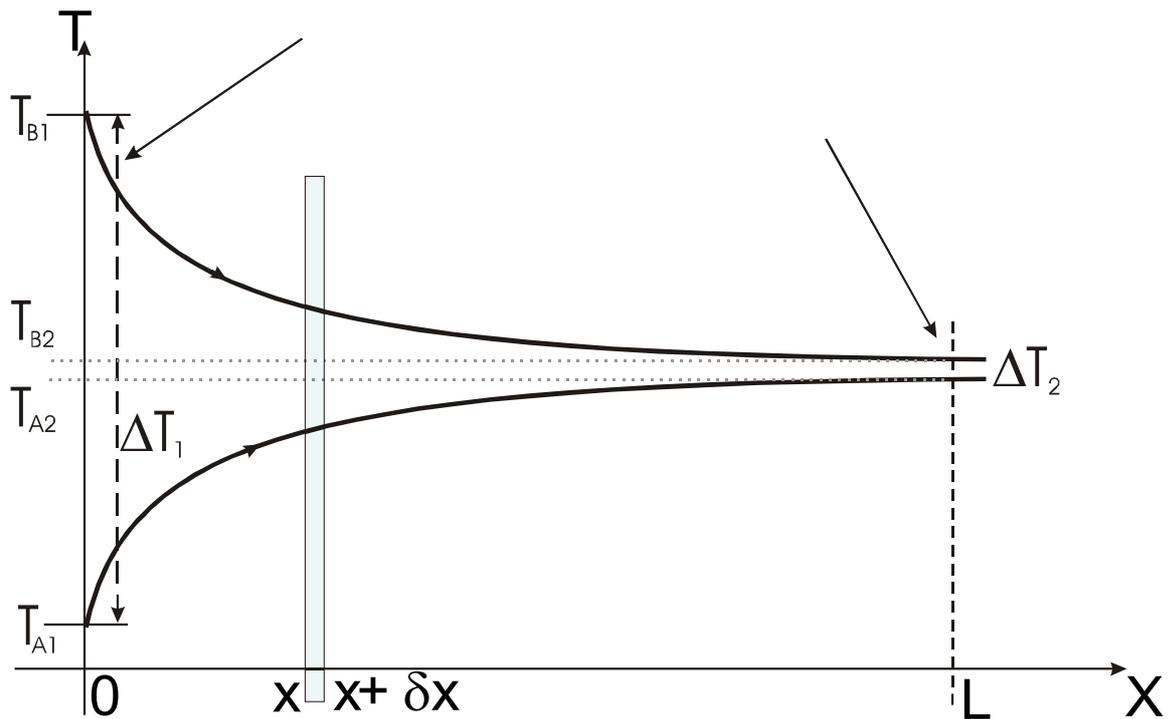
$$\dot{Q} = M_A \cdot C_{P_A} \cdot (T_{A_2} - T_{A_1}) \quad (2)$$

$$\dot{Q} = M_B \cdot C_{P_B} \cdot (T_{B_2} - T_{B_1}) \quad (3)$$

(nel calcolo energetico, consideriamo la pressione praticamente costante, ovvero liquidi incompressibili).

Mentre il calcolo energetico è dato semplicemente dal bilancio dell'entalpia (tanto calore cede un fluido, tanto l'altro ne riceve), il calcolo termico è più articolato (si devono calcolare le resistenze termiche, i coefficienti di convezione e il funzionamento delle superfici di scambio).

Consideriamo uno scambiatore in equicorrente, in cui il fluido A è a temperatura di ingresso al sistema, più bassa del fluido B, e analizziamo il tratto di lunghezza L , tra la sezione A1 e A2, come mostrato in Fig. 1. Avremo, in un diagramma che lega la temperatura alla distanza dall'ingresso del sistema, una situazione di questo tipo:



Notiamo un ΔT variabile, ovvero avremo un flusso termico fortemente variabile: in particolare, alla *sezione 1*, essendoci un $\Delta T = \Delta T_1$ grande, il flusso termico tra i due fluidi sarà piuttosto vivace, mentre alla *sezione 2*, poiché il $\Delta T = \Delta T_2$ è molto basso, il flusso termico sarà quasi nullo.

Data la natura così variabile di ΔT , siamo costretti, nello studio della potenza scambiata \dot{Q} , a considerare in realtà un $\bar{\dot{Q}}$ (il suo valore medio), e di conseguenza un $\Delta \bar{T}$ medio.

Consideriamo uno “scambiatore” infinitesimo di lunghezza δx , all'interno del quale possiamo ritenere l'andamento di ΔT praticamente lineare. Ottengo quindi una relazione, alla coordinata x :

$$\delta \dot{Q} = \frac{T_B(x) - T_A(x)}{R_{Tot}} \quad (4)$$

in cui \mathbf{R}_{Tot} rappresenta la resistenza termica dello scambiatore infinitesimo e che possiamo rappresentare in questo modo:

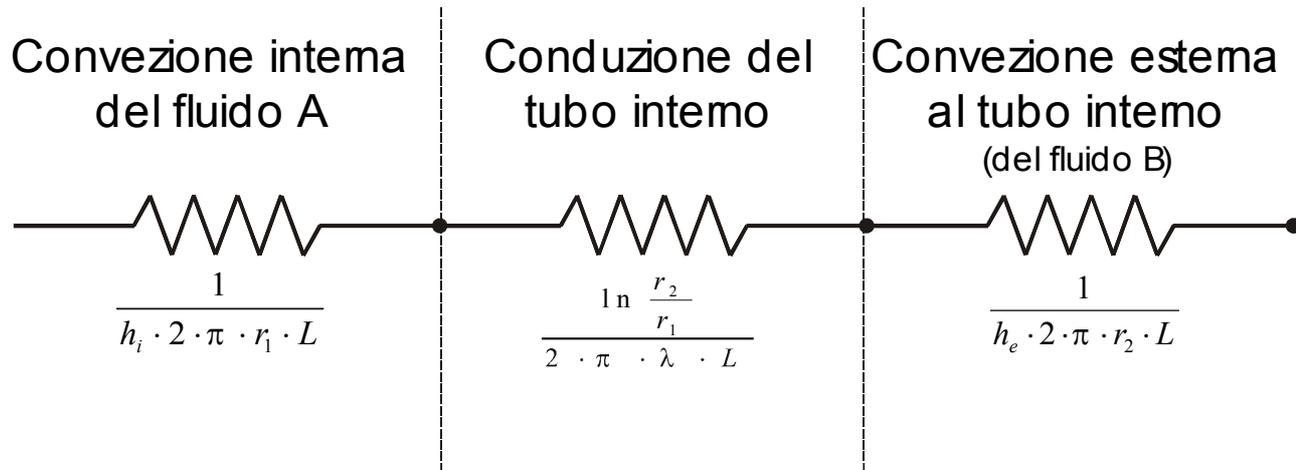


Fig. 4

in cui: λ è la *conducibilità termica* del materiale con il quale è costruito il tubo interno,

h_i è il coefficiente di convezione interno,

h_e è il coefficiente di convezione esterno,

L è la lunghezza dello scambiatore considerato, in questo caso δx .

La resistenza totale \mathbf{R}_{Tot} è la somma dei tre termini (poiché la lunghezza dello scambiatore è infinitesima, si ottiene rapidamente che la resistenza termica risulta infinita).

Definiamo ora il *coefficiente globale di scambio* \mathbf{K} in relazione alla superficie di scambio \mathbf{S} come:

$$K \cdot S = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot L}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_1}{\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{h_e \cdot r_2}} \quad (5)$$

in cui \mathbf{K} è strettamente legata alla superficie in cui avviene lo scambio \mathbf{S} .

Possiamo quindi scrivere la \mathbf{R}_{Tot} per unità di superficie come: $R_{Tot} = \frac{1}{K \cdot S}$ (6)

per cui otteniamo: $\dot{Q} = K \cdot S \cdot \Delta T$ (7)

e conseguentemente: $\delta \dot{Q} = K \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \delta x \cdot [T_B - T_A]$ (8)

ovvero il $\delta \dot{Q}$ (che è un infinitesimo: compare infatti il δx a numeratore) in funzione di $[T_B - T_A]$.

Esprimiamo ora il $\delta \dot{Q}$, anche attraverso le relazioni energetiche date dalle formule (2) e (3):

$$\begin{cases} \delta \dot{Q} = \dot{M}_A \cdot C_{P_A} \cdot \delta T_A \\ \delta \dot{Q} = \dot{M}_B \cdot C_{P_B} \cdot \delta T_B \end{cases} \quad (9)$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} \delta T_A = \frac{\delta \dot{Q}}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} \\ \delta T_B = \frac{\delta \dot{Q}}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}} \end{cases} \quad (10)$$

ovvero, facendo la differenza tra i due termini:

$$[\delta T_A - \delta T_B] = -\delta \dot{Q} \cdot \left[\frac{1}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}} - \frac{1}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} \right] \quad (11)$$

e per le proprietà della derivata :

$$\delta [T_A - T_B] = -\delta \dot{Q} \cdot \left[\frac{1}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}} - \frac{1}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} \right] \quad (12)$$

in cui compare ancora il termine $[T_B - T_A]$.

Sostituendo nell'equazione (8), la relazione (12) ora trovata, otteniamo:

$$\delta [T_B - T_A] = -K \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \delta x \cdot [T_B - T_A] \quad (13)$$

ovvero un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{\delta [T_B - T_A]}{T_B - T_A} = -K \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot \delta x \cdot \left[\frac{1}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} - \frac{1}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}} \right] \quad (14)$$

Integrando il primo membro tra la *sezione 1* e la *sezione 2*, e il secondo membro su tutta la lunghezza dello scambiatore, tra $\mathbf{0}$ ed \mathbf{L} , otteniamo:

$$\ln \frac{T_{B_2} - T_{A_2}}{T_{B_1} - T_{A_1}} = -K \cdot \underbrace{2\pi \cdot r_1 \cdot L}_S \cdot \left[\frac{1}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} - \frac{1}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}} \right] \quad (15)$$

Poiché però si vuole arrivare ad un'espressione del tipo: $\bar{Q} = K \cdot S \cdot \Delta \bar{T}$ (16)

ricaviamo il termine $K \cdot S$ dall'equazione (15):

$$K \cdot S = - \frac{\ln \frac{T_{B_2} - T_{A_2}}{T_{B_1} - T_{A_1}}}{\frac{1}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} - \frac{1}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}}} \quad (17)$$

Dalle espressioni (2) e (3), si può facilmente ricavare:

$$\frac{1}{\dot{M}_A \cdot C_{P_A}} = \frac{T_{A_2} - T_{A_1}}{\dot{Q}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\dot{M}_B \cdot C_{P_B}} = \frac{T_{B_2} - T_{B_1}}{\dot{Q}} \quad (18)$$

per cui la (17) diventa:

$$K \cdot S = - \frac{\left[\ln \frac{T_{B_2} - T_{A_2}}{T_{B_1} - T_{A_1}} \right] \cdot \dot{Q}}{(T_{B_1} - T_{A_1}) - (T_{B_2} - T_{A_2})}$$

(19)

Sostituendo in (16) :

$$\dot{Q} = \dot{Q} \cdot \Delta \bar{T} \cdot \frac{\ln \frac{T_{B_1} - T_{A_1}}{T_{B_2} - T_{A_2}}}{(T_{B_1} - T_{A_1}) - (T_{B_2} - T_{A_2})}$$

(20)

ovvero l'espressione che cercavamo per il $\Delta \bar{T}$ logaritmico:

$\Delta \bar{T}$ medio

$$\Delta \bar{T}_L = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

(21)

in cui i vari ΔT_n rappresentano le differenze di temperatura tra i due fluidi, all'entrata e all'uscita del sistema.

Notiamo che nello sviluppo del modello di $\Delta \bar{T}_L$ le uniche ipotesi che si sono fatte sono la incomprimibilità dei due fluidi: siamo infatti arrivati ad un'espressione in cui compaiono solo le differenze di temperatura dei due fluidi alle due sezioni dello scambiatore.

Consideriamo ora uno scambiatore in *controcorrente*, schematizzabile in questo modo:

Scambiatore TUBO-in-TUBO
(modello controcorrente)

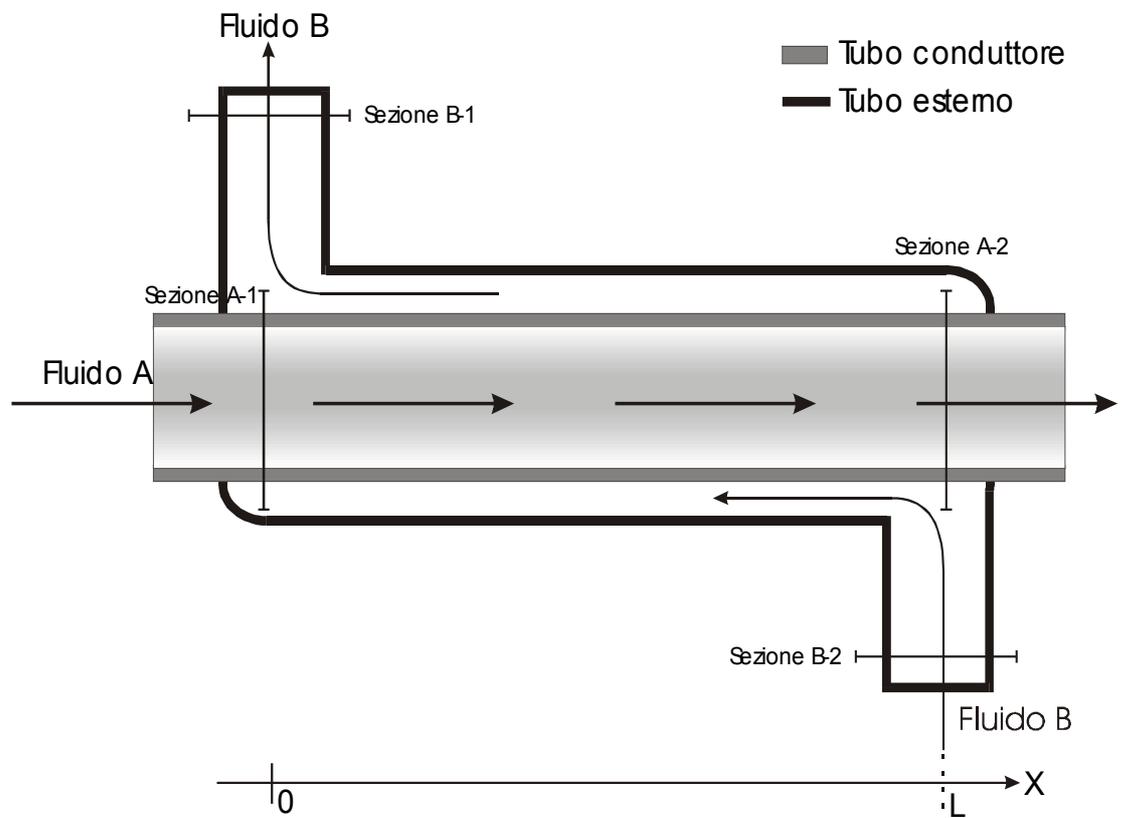
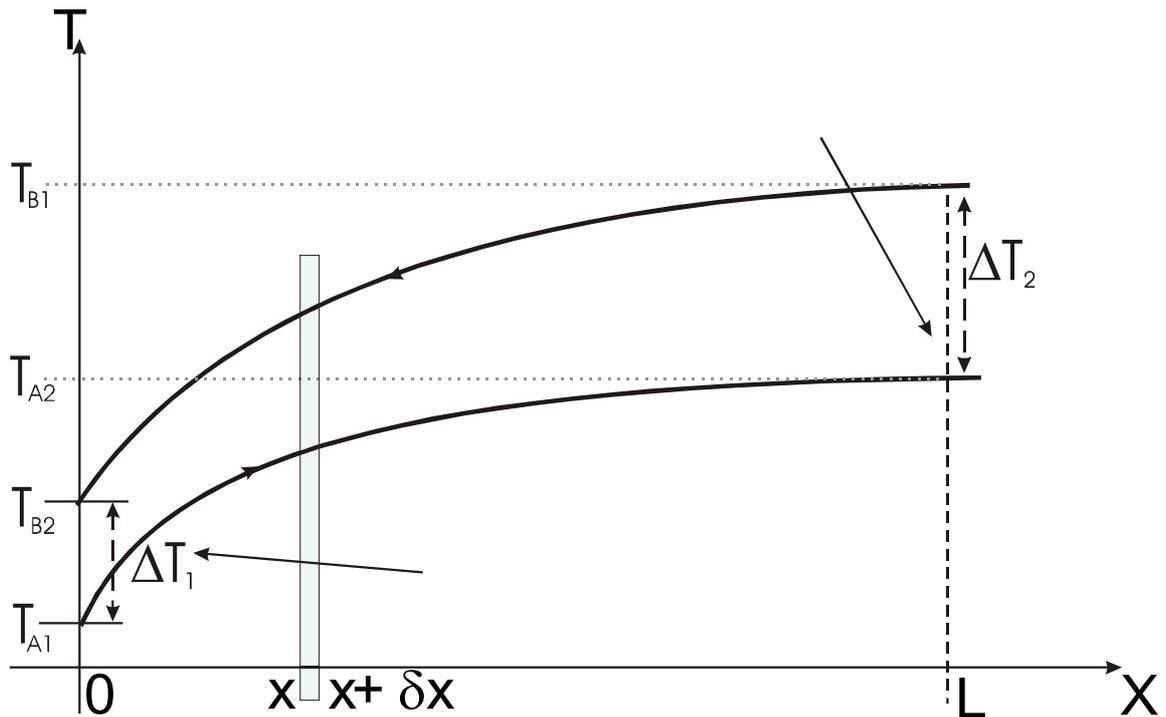


Fig. 4

poiché l'entrata del *fluido B* avverrà alla *sezione 2*, dove invece il *fluido A* esce, avremo una situazione di questo tipo:



in cui notiamo che il ΔT rimane lungo tutto il tragitto, quasi costante, variando poco tra 0 ed L .

Passando al calcolo del $\Delta \bar{T}$, possiamo, date le considerazioni fatte, utilizzare l'espressione del $\Delta \bar{T}_L$ trovato in (21).

Negli scambiatori di calore in *controcorrente*, avremo, a parità delle quattro temperature di ingresso ed uscita dei due fluidi, un $\Delta \bar{T}_L$ maggiore rispetto agli scambiatori di calore in *equicorrente*:

$$\Delta \bar{T}_{L,CC} > \Delta \bar{T}_{L,EC} \quad (22)$$

Questo, dalla (16) (K non è influenzato dalla corrente dei fluidi e $\dot{Q}_{CC} = \dot{Q}_{EC}$) si traduce nella minore necessità, da parte degli scambiatori in *controcorrente*, di superficie di scambio, e cioè è possibile costruire scambiatori meno ingombranti (e di conseguenza avere minori costi di materiale, dato che l'acciaio lucidato ha elevati costi).

Si deve però considerare la bassa variazione di ΔT lungo il percorso: se da un punto di vista termodinamico questo potrebbe sembrare un vantaggio (poca perdita di energia), dal punto di vista dello scambio termico, questo significa avere uno scambio meno vivace, ovvero una maggiore lentezza nel cambiamento di temperatura del fluido di processo. Negli scambiatori in *equicorrente*, il forte ΔT iniziale, consente un brusco cambio di temperatura iniziale del *fluido A*, portandolo **subito** ad una temperatura più bassa [alta] in breve tempo.

In situazioni critiche (dove cioè si deve interrompere velocemente un processo termico, per es. per interrompere un processo di pastorizzazione) si useranno più scambiatori in serie: il primo sarà uno scambiatore in *equicorrente* per cambiare rapidamente la temperatura del *fluido A*, gli altri in *controcorrente*, in modo da ridurre spazio e quindi costi.

Esercizio

La CPU di un computer è dotata di una superficie piana addetta al raffreddamento della stessa. Si vuole conoscere la temperatura che raggiunge detta superficie sapendo che:

- è quadrata e di lato $L = 50\text{mm}$;
- deve dissipare una potenza di 20W ;
- la temperatura ambiente è $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ e la temperatura di parete è $T_p = 100^\circ\text{C}$.

Nel caso la temperatura trovata sia eccessiva, si determini una superficie alettata di raffreddamento adeguata.

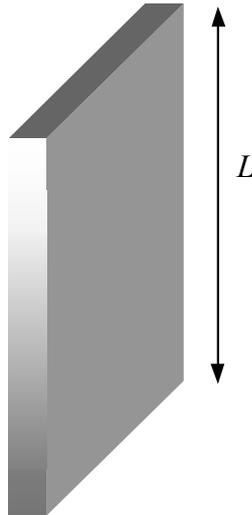


Figura 9 Superficie di raffreddamento di una CPU

Soluzione

Per risolvere l'esercizio abbiamo bisogno dei numeri di Grashof, Prandtl e Nusselt e per trovare la formula adatta, anche del numero di Rayleigh. È noto che per l'aria in condizione naturale il numero di Prandtl è

$$Pr = 0,71$$

Per trovare il numero di Grashof

$$Gr = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2}$$

dobbiamo conoscere:

- accelerazione di gravità $g = 9,81\text{m/s}^2$;
- coefficiente di dilatazione termica (che nel caso di gas è l'inverso della temperatura) $\beta \approx 1/333 \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$;
- viscosità cinematica $\nu = 16 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$.

Ora possiamo calcolare Gr :

$$Gr = \frac{9,81 \cdot (100 - 20) \cdot 0,05^3}{333 \cdot (16 \cdot 10^{-6})^2} = 1150,760$$

Conoscendo i numeri di Grashof e Prandtl possiamo calcolare il numero di Rayleigh

$$Ra = Gr \cdot Pr = 817\,039$$

che, come si può vedere è $\ll 10^9$. Siamo in convezione naturale e la formula che utilizzeremo è quella di McAdams

$$Nu = 0,59 \cdot Gr^{0,25} \cdot Pr^{0,25} = 17,74$$

Possiamo ricavare

$$h = Nu \frac{\lambda}{L} = \frac{17,74 \cdot 0,025}{0,05} = 8,87 \frac{W}{m^2 K}$$

Per ottenere h_{TOT} a questo termine va sommato quello dovuto all'irraggiamento che è

$$h_{IRR} = \frac{\alpha \sigma_0 |T_P - T_\infty|}{T_P - T_\infty} \cong 11 \frac{W}{m^2 K}$$

Si ricava così

$$h_{TOT} = 19,87 \frac{W}{m^2 K}$$

Dalla (13) possiamo ricavare T_P

$$T_P = T_\infty + \frac{\dot{Q}}{h_{TOT} \cdot S} = 20 + \frac{20}{19,87 \cdot 0,05^2} = 422,62^\circ C$$

La temperatura trovata è evidentemente troppo elevata per un componente elettronico e causerebbe danni alla CPU. Procediamo quindi alla realizzazione di una adeguata alettatura (che potrebbe essere, per esempio, di alluminio).

Scegliamo le seguenti misure per il sistema:

- lunghezza delle alette: $L_A = 20$ mm;
- sezione trasversale della singola aletta: $s = 3$ mm;
- distanza tra due alette adiacenti $d = 3$ mm.

È evidente che, per coprire la superficie in questione, che è un quadrato di 50 mm di lato, sono necessarie 8 alette.

Possiamo quindi calcolare la superficie totale S_{TOT} e la porzione di essa coperta dalle alette S_{AL} .

$$S_{TOT} = 0,05 \cdot 0,05 = 2,5 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$S_{AL} = 8 \cdot 0,05 \cdot 0,003 = 1,2 \cdot 10^{-3} m^2$$

Ricaviamo anche l'efficienza totale

$$\varepsilon_{TOT} = 1 - \frac{1,2}{2,5} (1 - 0,93) = 0,9664$$

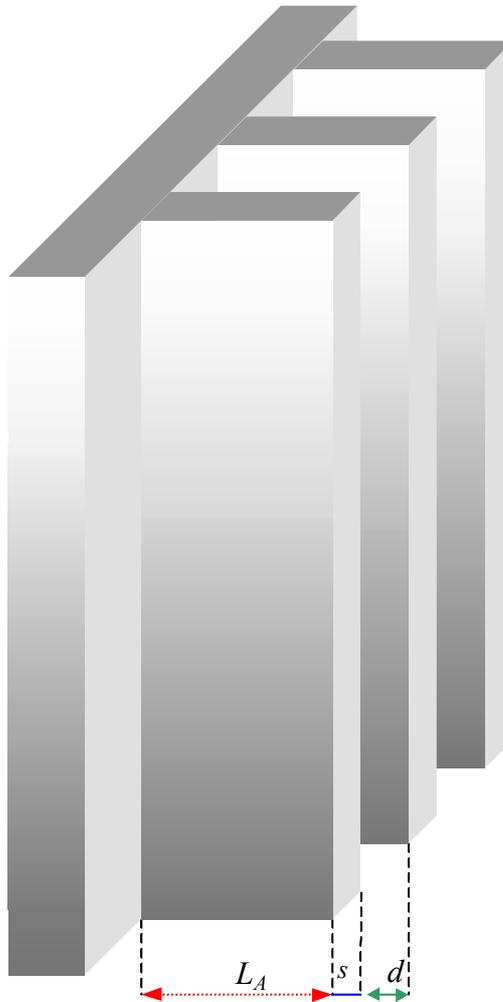


Figura 10: alettatura di raffreddamento di una CPU

Sapendo che la CPU deve dissipare una potenza di 20W, possiamo riscrivere la (24)

$$\dot{Q}_{TOT} = 20W = (T_P - T_\infty) \cdot \left[h(S_{TOT} - S_{AL}) + \frac{2\varepsilon_A L'}{s} h \cdot S_{AL} \right]$$

cioè

$$20 = (T_P - T_\infty) \cdot \left[19,87 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 0,93 \cdot 0,0215}{0,003} 19,87 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \right]$$

Possiamo quindi ricavare la T_P

$$T_P = 20 + \frac{20}{0,343} = 78,3^\circ C$$

Il valore di temperatura trovato è accettabile, quindi l'alettatura presa in esame è da considerare valida per il raffreddamento del dispositivo.